

1. Bizonyítsuk be, hogy  $U = \text{span}((1, 1, 0, 1), (0, -1, 2, 1))$  és  $W = \text{span}((0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1))$  alterek direkt kiegészítői egymásnak! Írjuk fel az  $U$ -ra való  $W$  irányú vetítés standard mátrixát!
2. Tegyük fel, hogy  $f$  és  $g$  is vetítések a  $V$  vektortéren. Lássuk be, hogy  $g \circ f$  általában nem vetítés (adjunk ellenpéldát!), de ha  $\text{Im } f \leq \text{Im } g$  vagy  $\text{Im } g \leq \text{Im } f$ , akkor igen!
3. Döntsük el, hogy az alábbi mátrixok közül melyek hasonlók  $\mathbb{R}$  fölött? A hasonlókra adjunk is meg egy átkonjugáló mátrixot! Melyik mátrix mátrixa egy altérre való vetítésnek?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Határozzuk meg az alábbi lineáris transzformációk sajátértékeit és sajátvektorait!
  - a) Az  $x + y + z = 0$  síkra való vetítés a  $z$  tengely irányában.
  - b) A  $p(x) \mapsto (x - 1)p'(x)$  transzformáció a  $K[x]_{\leq 2}$  vektortéren.
5. Az alábbi valós mátrixok közül melyek diagonalizálhatók! Adjuk meg mindegyik mátrixnak a sajátértékeit és a sajátaltérreik bázisát!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

6. Melyek igazak egy  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  mátrixra?
  - a) Ha  $\mathbf{v}$  sajátvektora  $A$ -nak, akkor  $\mathbf{v}$  sajátvektora  $A^2$ -nek is.
  - b) Ha  $\mathbf{v}$  sajátvektora  $A^2$ -nek, akkor  $\mathbf{v}$  sajátvektora  $A$ -nak is.
  - c) Ha  $0$  sajátértéke  $A^2$ -nek, akkor  $0$  sajátértéke  $A$ -nak is.
  - d) Ha  $a^2 = b$  és  $b$  sajátértéke  $A^2$ -nek, akkor  $a$  vagy  $-a$  sajátértéke  $A$ -nak is.
7. Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait! Írjuk fel a hozzájuk tartozó lineáris transzformációk mátrixát a sajátvektorokból álló bázisban! Diagonalizálás segítségével számítsuk ki a  $B$  mátrix  $n$ -edik hatványát!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

8. Határozzuk meg az  $A^2$  és az  $A$  mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait, azok algebrai és geometriai multiplicitását és a mátrixok karakterisztikus polinomját, ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Házi feladatok**

Beadási határidő: február 24.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni. Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Írjuk fel az origón átmenő,  $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$  irányvektorú  $e$  egyenes mentén az  $x + y + z = 0$  egyenletű  $S$  síkra vetítő leképezés, illetve az  $S$  sík mentén az  $e$  egyenesre való vetítés standard mátrixát! Mi a két leképezés kompozíciójának standard mátrixa?
2. Döntsük el, hogy az alábbi mátrixok között melyek hasonlóak  $\mathbb{R}$  fölött? A hasonlókra adjunk is meg egy átkonjugáló mátrixot!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Határozzuk meg a következő lineáris transzformációk sajátértékeit és sajátvektorait!
  - a) Az  $(1, 2, -3)$  irányvektorú, origón átmenő egyenesre való tükrözés az  $\mathbb{R}^3$ -ben.
  - b) A transzponálás a  $2 \times 2$ -es valós mátrixok terében.
4. Az alábbi mátrixok közül melyek diagonalizálhatók  $\mathbb{R}$  fölött? Mindegyik mátrixra adjuk meg a sajátértékeket és azok algebrai és geometriai multiplicitását!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

5. Adjuk meg az  $\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{bmatrix}$  komplex mátrix összes sajátértékét és sajátvektorát!
6. Számítsuk ki az  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  mátrix  $n$ -edik hatványát diagonális alakra hozással!
- 7\*. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges  $n \times n$ -es  $A, B$  mátrixokra  $AB$ -nek és  $BA$ -nak ugyanazok a sajátértékei!