1. Bizonyítsuk be, hogy egy $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix pontosan akkor ferdén önadjungált, ha iA önadjungált.

2. Az alábbiak közül melyik mátrix hozható valós vagy komplex diagonális alakra? Lehet-e a diagonalizáló mátrix unitér/ortogonális?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{bmatrix}$$

3. a) Mutassuk meg, hogy a következő mátrixok ortogonálisan hasonlók.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Határozzuk meg a hasonlóság ortogonális mátrixát!
c) Határozzuk meg A karakterisztikus polinomját!

4. Milyen kúpszeletet írnak le az alábbi egyenletek? Változtassuk meg a koordinátarendszert úgy, hogy az egyenletek $a(x')^2 + b(y')^2 = c$ alakúak legyenek!
a) $x^2 - 4xy + y^2 + 6y - 2 = 0$
b) $xy = 1$

Egy φ bilineáris függvény elfajuló, ha van olyan $\mathbf{v} \neq 0$ vektor, amelyre $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ minden $\mathbf{x}$-re, vagy ekvivalensen, ha a mátrixa nem invertálható.

5. Hozzuk diagonális alakra az alábbi kvadratikus alakokat! Adjunk meg egy-egy bázist, amelyben diagonális alakúak! Döntsük el, hogy milyen a jellegük! Adjunk meg olyan bilineáris függvényeket, melyekhez ezek tartoznak! Elfajulóak-e ezek a bilineáris függvények?
a) $x_1^2 + x_1x_2$
b) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$

6. a) Mi a $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_2y_2$ bilineáris függvény Gram-mátrixa a standard bázisban és az $\{(1, 1), (0, 1)\}$ bázisban? Elfajuló-e ez a bilineáris függvény?
b) Mi a hozzá tartozó kvadratikus alak?
c) Mit mondhatunk a kvadratikus alak jellegéről?

7. Egy valós bilineáris függvény Gram-mátrixa standard bázisban $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
a) Határozzuk meg, a hozzá tartozó kvadratikus alak mátrixát és jellegét!
b) Adjunk meg $\mathbb{R}^2$-ben olyan bázist, amelyben a kvardatikus alak négyzetösszeg, és írjuk fel ebben a bázisban a kvadratikus alakot!

8. Hozzuk kanonikus alakra az $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$ egyenletű másodrendű görbe egyenletét és ábrázoljuk a görbét és az új koordinátarendszer tengelyeit az eredeti koordinátarendszerben!

Házi feladatok

Beadási határidő: március 30.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni. Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Bizonyítsuk be, hogy normális mátrixnak skalárszorosa, hatványa, inverze (ha van) és transzponáltja is normális, de normális mátrixok szorzata lehet nem normális (adjunk ellenpéldát)!

2. a) Mutassuk meg, hogy a következő mátrixok ortogonálisan hasonlók:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Határozzuk meg a hasonlóság ortogonális mátrixát!
c) Határozzuk meg A karakterisztikus polinomját!

3. Hozzuk diagonális alakra az alábbi kvadratikus alakokat! Adjunk meg egy-egy bázist, amelyben diagonális alakúak! Döntsük el, hogy milyen a jellegük! Adjuk meg mindegyikhez a hozzá tartozó szimmetrikus bilineáris függvényt, és adjunk meg valamelyikhez egy másik, elfajuló bilineáris függvényt is.
a) $2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$
b) $x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2 + 8x_2x_3$

4. a) Mi a $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_2$ bilineáris függvény Gram-mátrixa a standard bázisban és az $\{(1, -1), (1, 1)\}$ bázisban?
b) Mi a hozzá tartozó kvadratikus alak?
c) Mit mondhatunk a kvadratikus alak jellegéről?

5. Egy valós bilineáris függvény Gram-mátrixa standard bázisban $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$
a) Határozzuk meg, a hozzá tartozó kvadratikus alak mátrixát és jellegét!
b) Adjunk meg $\mathbb{R}^2$-ben olyan bázist, amelyben a kvardatikus alak négyzetösszeg, és írjuk fel ebben a bázisban a kvadratikus alakot!

6. Hozzuk kanonikus alakra az $8y^2 + 6xy + 6x - 2y - 1 = 0$ egyenletű másodrendű görbe egyenletét és ábrázoljuk a görbét és az új koordinátarendszer tengelyeit az eredeti koordinátarendszerben!

7*. Legyen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ egy önadjungált mátrix. Bizonyítsuk be, hogy az $A, A^2, A^3, \ldots$ mátrixok vagy mind különbözőek, vagy legfeljebb két különböző van köztük!