1. Keressük meg azt a mátrixot, mely a definíció alapján igazolja, hogy az alábbi két mátrix kongruens:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Milyen feltétel mellett lesz az alábbi valós mátrix pozitív, illetve negatív definit? Milyen jellege lehet még a mátrixnak más a értékekre?

$$A = \begin{bmatrix} a & 2 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

3. Határozzuk meg az alábbi A mátrix pozitív (szemi)definit négyzetgyökét.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

4. Határozzuk meg a $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{y}$ valós bilineáris függvényre nézve a $W = \operatorname{span}((1,1,0),(0,2,1))$ altér jobb és bal oldali merőlegesét, ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Legyen egy f komplex skaláris szorzás Gram–mátrixa $\begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$ az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ standard bázisban. Számítsuk ki $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ hosszát és skaláris szorzatát a $(\mathbb{C}^2, f)$ euklideszi térben. Adjunk meg egy f-re ortonormált bázist $\mathbb{C}^2$-ben! Legyen $\mathbf{b}_1 = (1, i), \mathbf{b}_2 = (1, -1)$ új bázis Adjuk meg f Gram-mátrixát ebben az új bázisban.

6. Legyen $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^* A\mathbf{y}$ az alábbi A mátrixszal.

a) Számítsuk ki a $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ értékét $\mathbf{x} = (1, i, 0)$, $\mathbf{y} = (2 - i, 1, 1)$-re.
b) Adjuk meg a φ által definiált kvadratikus alakot.
c) Diagonalizáljuk az A mátrixot mint Gram-mátrixot, és adjunk φ-ortogonális bázist $\mathbb{C}^3$-ben.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 2 & 1 \\ 1-i & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

7. Bizonyítsuk be, hogy minden indefinit hermitikus bilineáris függvényre nézve van olyan nem nulla vektor, amely merőleges önmagára!

Házi feladatok

Beadási határidő: április 6.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni. Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Írjuk fel az $A = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$ mátrixot két lényegesen különböző módon $C^T C$ alakban (azaz a két felbontás C mátrixa ne legyen egymás negatívja)!

2. Adjuk meg az alábbi mátrix Cholesky-felbontását!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

3. Egy $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$-en értelmezett komplex bilineáris függvény $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = i\bar{u}_1 v_2 - i\bar{u}_2 v_1$.

a) Írjuk fel a mátrixát!

b) Hermite-féle-e a bilineáris függvény?

c) Határozzuk meg a jellegét!

4. Adjunk meg egy olyan bázist, amelyben az előző feladatbeli g mátrixa diagonális! Írjuk fel a kvadratikus alakot ebben a bázisban!

5. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, és tekintsük a

$$\varphi(p, q) = p(a)q(b) + q(a)p(b)$$

bilineáris függvényt a legfeljebb elsőfokú valós polinomok terén. Írjuk fel a φ mátrixát a standard $\{1, x\}$ bázisban! Az a és b értékétől függően mi a jellege a φ-hez tartozó kvadratikus alaknak?

6. Határozzuk meg $\mathbb{R}^3$-ben az $(1, -1, 1)$ vektor által generált altér bal, illetve jobb oldali merőlegesét a $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ bilineáris függvényre nézve, ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

7*. Melyek azok a φ valós szimmetrikus bilineáris függvények, amelyekre bármely $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ vektor eleme egy φ-ortogonális bázisnak?