

1. Határozzuk meg az alábbi mátrixok redukált SVD-felbontását!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Írjuk fel az 1. feladatbeli B és C mátrixok teljes SVD-felbontását és a C mátrix SVD-felbontásának diadikus alakját!
3. Számítsuk ki az 1.-beli B és C mátrixok pszeudoinverzét az SVD-felbontás segítségével!
4. Számítsuk ki az 1. feladatbeli négyzetes mátrixok polárfelbontását! Melyiknek van többféle is?
5. Adjuk meg az 1.-beli nem 1-rangú mátrixok legjobb 1-rangú közelítését! Mekkora a közelítő mátrix eltérése Frobenius-normában?
6. Mutassuk meg, hogy ha egy $\mathbf{A}$ komplex négyzetes mátrix poláris felbontásában $A = PQ = QP$, azaz a pozitív szemidefinit és az unitér rész felcserélhető, akkor A normális mátrix!
7. Írjuk fel az alábbi mátrix karakterisztikus polinomját és minimálpolinomját!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8. Van-e az egységmátrixon kívül olyan mátrix $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ -ben, illetve $\mathbb{Q}^{2 \times 2}$ -ben, amelynek az ötödik hatványa az egységmátrix?

Házi feladatok

Beadási határidő: április 14.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni. Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Határozzuk meg az alábbi mátrixok redukált SVD-felbontását!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

2. Írjuk fel az 1. feladatbeli A és B mátrixok teljes SVD-felbontását és a C mátrix SVD-felbontásának diadikus alakját!
3. Számítsuk ki az 1.-beli B mátrix pszeudoinverzét és a C mátrix polárfelbontását az SVD-felbontásukból!
4. Írjuk fel az 1. feladat C mátrixának és C^{-1} -nek is a legjobb 1 rangú közelítését! Mekkora a közelítések hibája Frobenius-normában?
5. Írjuk fel az alábbi mátrix karakterisztikus polinomját és minimálpolinomját!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Van-e olyan 3×3 -as $\mathbb{Q}$ fölötti mátrix, melynek minimálpolinomja
- a) $x^2 - 2$;
b) $x^2 + x$?

- 7*. Mutassuk meg, hogy minden $M \in \mathbb{C}^{m \times n}$ mátrixra

$$\min_{|\mathbf{x}|=1} |M\mathbf{x}|$$

vagy 0, vagy (teljes oszloprangú mátrixra) a legkisebb szinguláris érték, és a minimumát az ehhez tartozó jobb szinguláris vektorokon veszi fel!