1. *Bizonyítsuk be, hogy* $U = \mathrm{span}((1,1,0,1),(0,-1,2,1))$ *és* $W = \mathrm{span}((0,1,0,0),(0,0,0,1))$ *alterek direkt kiegészítői egymásnak! Írjuk fel az* U*-ra való* W *irányú vetítés standard mátrixát!*

Megoldás: Ahhoz, hogy $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$, elég belátni, hogy a négy megadott vektor lineárisan független, mert akkor egyrészt $U \cap W = 0$, másrészt a 4-dimenziós $\mathbb{R}^4$-ben 4 független vektor szükségképpen generátorrendszer, ezért $U + W = \mathbb{R}^4$ is teljesül:

$$|P| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

A vetítés az U bázisvektorait önmagukba, a W bázisvektorait pedig $\mathbf{0}$-ba képezi, tehát a standard mátrix az $AP = P'$, azaz $P^T A^T = (P')^T$ mátrixegyenlet megoldása, ahol P' oszlopai a P első két oszlopa és két $\mathbf{0}$ oszlop.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

(Érdemes ellenőrizni a mátrix hatását a négy bázisvektoron.)

2. *Tegyük fel, hogy* f *és* g *is vetítések a* V *vektortéren. Lássuk be, hogy* $g \circ f$ *általában nem vetítés (adjunk ellenpéldát!), de ha* $\mathrm{Im}\, f \leq \mathrm{Im}\, g$ *vagy* $\mathrm{Im}\, g \leq \mathrm{Im}\, f$*, akkor igen!*

Megoldás: Ha f az x tengelyre való merőleges vetítés, g pedig az $y = x$ egyenesre, akkor $[g \circ f]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$, amelynek a négyzete nem önmaga, hanem $\begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 \end{bmatrix}$, tehát $g \circ f$ nem vetítés.

Legyen A az f, B a g mátrixa valamely $\mathcal{B}$ bázisban. Ekkor $A^2 = A$, $B^2 = B$, és ha $\mathrm{Im}\, f \leq \mathrm{Im}\, g$, akkor $BA = A$, ugyanis A oszlopait B helyben hagyja, ha viszont $\mathrm{Im}\, g \leq \mathrm{Im}\, f$, akkor $AB = B$, ugyanis akkor B oszlopait hagyja helyben az A. Az első esetben $BABA = BAA = BA$, a másodikban $BABA = BBA = BA$, tehát mindkét esetben igaz, hogy $[g \circ f]_{\mathcal{B}}^2 = (BA)^2 = BA = [g \circ f]_{\mathcal{B}}$, ezért $g \circ f$ vetítés.

3. *Döntsük el, hogy az alábbi mátrixok közül melyek hasonlók* $\mathbb{R}$ *fölött? A hasonlókra adjunk is meg egy átkonjugáló mátrixot! Melyik mátrix mátrixa egy altérre való vetítésnek?*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Írjuk fel mindegyik mátrixra a nyomot, a rangot és a determinánst. Hasonló mátrixokra ezek mind megegyeznek, tehát ezután csak az olyan mátrixpárokkal kell foglalkoznunk, amelyekre ez a három szám azonos.

	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
nyom	1	3	0	2	2	3
rang	1	2	2	1	2	2
det	0	2	-2	0	1	2

Az $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ és $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrixokról kell még eldönteni, hogy hasonlók-e, más hasonló pár nem lehet a 6 mátrix között. Olyan $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ invertálható mátrixot keresünk, amelyre $P^{-1}AP = B$, azaz $AP = PB$, elemekkel leírva $\begin{bmatrix} a & b \\ 2c & 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & a+b \\ 2c & c+d \end{bmatrix}$. Ez a, b, c, d-re lineáris egyenletrendszer, amelynek a megoldása $a = 0$, $d = c$, és b, c tetszőleges, vagyis az összes olyan $P = \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & c \end{bmatrix}$ mátrix megfelel, amelynek a determinánsa $-bc \neq 0$, például $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Ezzel beláttuk, hogy A és B hasonló mátrixok.

Megjegyzés: Mivel A diagonális mátrix, az A és B hasonlóságát azzal is bizonyíthatjuk, hogy megkeressük B sajátértékeit (mivel háromszögmátrix, ezt számolás nélkül is megállapíthatjuk), és belátjuk, hogy B diagonalizálható, ami pedig rögtön következik abból, hogy a 2×2-es B mátrixnak két különböző sajátértéke van.

Egy invertálható mátrix csak akkor lehet vetítés, ha az megegyezik az I egységmátrixszal, ugyanis a vetítés az oszloptéren (azaz a képtéren) identikusan hat. Tehát csak az első és a negyedik mátrix jön szóba. Az első négyzete önmaga, így az vetítés ($\mathrm{span}(\mathbf{e}_1)$-re a $\mathrm{span}(\mathbf{e}_2)$ mentén), a negyedik négyzete viszont önmaga kétszerese, így az nem vetítés.

4. *Határozzuk meg az alábbi lineáris transzformációk sajátértékeit és sajátvektorait!*

a) Az $x + y + z = 0$ síkra való vetítés a z tengely irányában.

b) A $p(x) \mapsto (x-1)p'(x)$ transzformáció a $K[x]_{\leq 2}$ vektortéren.

Megoldás: a) A sík nemnulla vektorai a sajátvektorok $\lambda = 1$ sajátértékkel, a z tengellyel párhuzamos nemnulla vektorok pedig $\lambda = 0$ sajátértékkel. Több nem lehet, mert már ezek is kigenerálják a teljes $\mathbb{R}^3$-at.

b) 0 csak akkor lehet a kép, ha $p' = 0$, azaz, ha p konstans polinom, így a $\lambda = 0$ sajátértékhez a $c \neq 0$ konstans polinomok a sajátvektorok. Ha $\lambda \neq 0$ sajátérték, és $p(x)$ ehhez sajátvektor, akkor $(x-1)p'(x)$ skalárszorosa $p(x)$-nek, tehát $p(x) = (x-1)h(x)$ alakú, képe pedig $(x-1)p'(x) = (x-1)((x-1)h'(x) + h(x)) = (x-1)^2h'(x) + (x-1)h(x)$ skalárszorosa $p(x) = (x-1)h(x)$-nek, tehát $(x-1)^2h'(x)$ is az. Legföljebb másodfokú polinomok között ez csak úgy történhet, hogy vagy $h'(x) = 0$, tehát $p(x) = c(x-1)$ valamely $c \neq 0$-ra, vagy $p(x) = c(x-1)^2$ valamely $c \neq 0$-ra. A sajátértékek a c, $c(x-1)$ és $c(x-1)^2$ polinomokhoz rendre $0, 1, 2$.

Másképpen: Felírhatjuk a transzformáció (standard) mátrixát, és megkereshetjük ennek a sajátértékeit és sajátvektorait, majd megadjuk a sajátvektoroknak megfelelő polinomokat.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0, 1, 2, \quad \text{s.vektorok:} \quad t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

így a sajátvektorok az eredeti $K[x]_{\leq 2}$ vektortérben az 1, $x-1$ és x^2-2x+1 polinomok nemnulla konstansszorosai.

5. *Az alábbi valós mátrixok közül melyek diagonalizálhatók! Adjuk meg mindegyik mátrixnak a sajátértékeit és a sajátaltereik bázisát!*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Megoldás: A karakterisztikus polinomja $|A - xI| = x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$, sajátértékei 3 és -1. Két különböző sajátértéke van, ezért diagonalizálható, és diagonális alakja $\mathrm{diag}(3,-1)$.
Sajátalterei az $A-3I$ és $A+I$ nullterei:

$$\lambda = 3: \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda = -1: \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Így V_3 bázisa $\{(-1,1)\}$, V_{-1} bázisa $\{(1,1)\}$.

B felső háromszögmátrix, ezért a sajátértékei a diagonális elemei, tehát csak 1. 1 algebrai multiplicitása 3, viszont $B-I$ rangja 1, ezért a sajátaltér dimenziója (azaz az 1 geometriai multiplicitása) csak 2, tehát a B mátrix nem diagonalizálható. A V_1 sajátaltér bázisa könnyen leolvashatóan $\{(1,0,0),(0,0,1)\}$.

C is felső háromszögmátrix, így könnyen leolvashatók a sajátértékei: $1, 2, -1$. Mivel ezek mind különbözők, C diagonalizálható, és diagonális alakja $\mathrm{diag}(1,2,-1)$. A sajátalterek:

$$\lambda = 1\text{-hez:} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 2\text{-höz:} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = -1\text{-hez:} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7/6 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = \frac{1}{6}t\begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Tehát a három sajátaltér bázisa $\{(1,0,0)\}$, $\{(1,1,0)\}$ és $\{(7,-2,6)\}$.

6. *Melyek igazak egy $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrixra?*

a) Ha $\mathbf{v}$ sajátvektora A-nak, akkor $\mathbf{v}$ sajátvektora A^2-nek is.
b) Ha $\mathbf{v}$ sajátvektora A^2-nek, akkor $\mathbf{v}$ sajátvektora A-nak is.
c) Ha 0 sajátértéke A^2-nek, akkor 0 sajátértéke A-nak is.
d) Ha $a^2 = b$ és b sajátértéke A^2-nek, akkor a vagy $-a$ sajátértéke A-nak is.

Megoldás: a) Igaz. Ha $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, akkor $A^2\mathbf{v} = A(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(A\mathbf{v}) = \lambda^2\mathbf{v}$.

b) Nem igaz. Például az $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ négyzete az egységmátrix, amelynek minden nemnulla vektor sajátvektora, de A-nak nem. Például az $(1,0)$ nem sajátvektora A-nak, de A^2-nek igen.

c) Igaz. Ha A^2-nek sajátértéke a 0, akkor $|A|^2 = |A^2| = 0$, ezért $|A| = 0$, amiből következik, hogy A-nak is sajátértéke a 0.

d) Igaz. $0 = |A^2 - a^2I| = |(A+aI)(A-aI)| = |A+aI| \cdot |A-aI| \Rightarrow |A+aI| = 0$ vagy $|A-aI| = 0$. (Itt használtuk, hogy I felcserélhető bármely mátrixszal, bár általában $A^2 - B^2 \neq (A+B)(A-B)$.)

7. *Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait! Írjuk fel a hozzájuk tartozó lineáris transzformációk mátrixát a sajátvektorokból álló bázisban! Diagonalizálás segítségével számítsuk ki a B mátrix n-edik hatványát!*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Megoldás: $|A - xI| = x^2 - 2x \Rightarrow$ a sajátértékek 0 és 2. Két különböző sajátérték van, tehát A diagonalizálható. A sajátvektorok:

$$0: \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = t\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix},\ 2: \begin{bmatrix} -1 & i \\ -i & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = t\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$t \neq 0$-ra. Egy sajátbázis $\mathcal{B} = \{(-i,1),(i,1)\}$. Az ezekből a vektorokból mint oszlopokból álló P áttérési mátrixszal $P^{-1}AP = D = \operatorname{diag}(0,2)$.
B sajátértékei 1 és 2, sajátvektorai

$$1: \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad 2: \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$t \neq 0$-ra. Egy sajátbázis $\mathcal{B} = \{(1,0),(-1,1)\}$. Az ezekből a vektorokból mint oszlopokból álló P áttérési mátrixszal $P^{-1}AP = D = \operatorname{diag}(1,2) \Rightarrow A = PDP^{-1}$. Így

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1-2^n \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

8. *Határozzuk meg az A^2 és az A mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait, azok algebrai és geometriai multiplicitását és a mátrixok karakterisztikus polinomját, ha*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Megoldás: A szimmetrikus mátrix, és az oszlopai egymásra merőleges, 2 hosszúságú vektorok, ezért $A^2 = 4I$. Ez utóbbinak 4 az egyetlen sajátértéke, és minden nemnulla vektor sajátvektora. Tehát 4 geometriai és algebrai multiplicitása egyaránt 4. A^2 karakterisztikus polinomja eszerint $(x-4)^4$. Másrészt a 3.a) feladat megoldása szerint A sajátvektorai csak ± 2 lehetnek. $A - 2I$ láthatóan egy rangú mátrix (az összes többi sor az első sor -1-szerese), ezért a 2 az A 3-szoros geometriai és legalább 3-szoros algebrai multiplicitású sajátértéke. A hozzá tartozó sajátvektorok az $x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0$ sík nemnulla vektorai. A -2 is sajátérték, a mátrixból is könnyen leolvasható, hogy $(-1,1,1,1)$ egy -2-höz tartozó sajátvektor, s mivel -2 algebrai multiplicitása már csak 1 lehet, ez a geometriai multiplicitása is, vagyis az összes, -2-höz tartozó sajátvektor a $(-1,1,1,1)$ vektor skalárszorosa. (Egyébként az, hogy -2 is sajátérték, abból is leolvasható, hogy A nyoma 4, és így az utolsó sajátérték $4 - 3 \cdot 2 = -2$.) Tehát 2 algebrai multiplicitása nem lehet 3-nál több (és így pontosan 3), és $k_A(x) = (x-2)^3(x+2)$.