1. *Számítsuk ki az $\mathbf{a} = (1, i, 1+i)$ és $\mathbf{b} = (1-i, i, 1+i)$ vektorok skaláris szorzatát és távolságát!*

Megoldás: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 1(1-i) - i \cdot i + (1-i)(1+i) = 4 - i$.
$|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = |(i, 0, 0)| = 1$.

2. *Ortogonalizáljuk a $\mathbb{C}^3$-beli $\{(i, 0, 1),\ (1, i, 1+i)\}$ vektorrendszert, és egészítsük ki $\mathbb{C}^3$ ortogonális bázisává! Tegyük ortonormálttá ezt a bázist!*

Megoldás: Egészítsük ki rögtön bázissá a $\mathbf{b}_1 = (i, 0, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (1, i, 1+i)$ vektorrendszert, mondjuk, a $\mathbf{b}_3 = (0, 0, 1)$ vektorral, és ezt a bázist ortogonalizáljuk, akkor az új bázis első két vektora az eredeti vektorrendszer ortogonalizáltja lesz.
$\mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_1 = (i, 0, 1)$,
$\mathbf{c}_2' = \mathbf{b}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{c}_1 = (1 - \frac{1}{2}i,\ i,\ \frac{1}{2} + i)$. Legyen $\mathbf{c}_2 = 2\mathbf{c}_2' = (2 - i,\ 2i,\ 1 + 2i)$.
$\mathbf{c}_3' = \mathbf{b}_3 - \frac{1}{2}\mathbf{c}_1 - \frac{1-2i}{14}\mathbf{c}_2 = (0, 0, 1) - \frac{1}{2}(i, 0, 1) - \frac{1}{14}(-5i, 4 + 2i, 5) = \frac{1}{7}(-i, -2 - i, 1)$.
Legyen $\mathbf{c}_3 = (-i, -2 - i, 1)$.
Tehát az eredeti vektorrendszer ortogonalizáltja $\{(i, 0, 1), (2-i,\ 2i,\ 1+2i)\}$, az ennek kiegészítésével kapott ortogonális bázis $\{(i, 0, 1),\ (2 - i, 2i, 1 + 2i),\ (-i, -2 - i, 1)\}$, az ortonormált pedig $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(i, 0, 1),\ \frac{1}{\sqrt{14}}(2 - i, 2i, 1 + 2i),\ \frac{1}{\sqrt{7}}(-i, -2 - i, 1)\}$.

3. *Legyen $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{x} + i\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ vektor pontosan akkor merőleges a konjugáltjára, ha $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ a valós euklideszi térben azonos hosszúságú, egymásra merőleges vektorok!*

Megoldás:

$$\langle \mathbf{x} - i\mathbf{y},\ \mathbf{x} + i\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, i\mathbf{y} \rangle + \langle -i\mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle -i\mathbf{y}, i\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + i \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + i \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + i \cdot i \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle =$$

$$= |\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{y}|^2 + i \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + i\overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle} = |\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{y}|^2 + 2i \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0 \iff |\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{y}|^2 = 0 \text{ és } \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$$

$\iff |\mathbf{x}| = |\mathbf{y}|$ és $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

4. *Döntsük el az alábbi mátrixok mindegyikéről, hogy önadjungált, ferdén önadjungált, unitér, illetve normális-e?*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Megoldás: B önadjungált, ezért normális is, de nem ferdén önadjungált, és nem unitér. C unitér, ezért normális is, de nem önadjungált, és nem is ferdén önadjungált. A nem unitér, nem önadjungált, és nem ferdén önadjungált. A normalitást ellenőrizhetjük az $A^*A = AA^*$ egyenlőséggel, vagy észrevehetjük, hogy A egy unitér (és így normális) mátrix skalárszorosa, ezért maga is normális. Végül D szintén nem önadjungált, ferdén önadjungált vagy unitér, és a normalitást ellenőrizve azt látjuk, hogy $D^*D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, míg $DD^* = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, ezért D nem is normális.

5. *Bizonyítsuk be, hogy egy A $n \times n$-es valós (illetve komplex) mátrix pontosan akkor szimmetrikus (önadjungált), ha minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ (illetve $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$) vektorra $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle$.*

Megoldás: Elég az általánosabb, komplex esetet bizonyítani. Ha A önadjungált, akkor $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = (A\mathbf{x})^*\mathbf{y} = \mathbf{x}^*A^*\mathbf{y} = \mathbf{x}^*A\mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle$ minden $\mathbf{x}, \mathbf{y}$-ra.
Ha $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle$, azaz $\mathbf{x}^*A^*\mathbf{y} = \mathbf{x}^*A\mathbf{y}$ minden $\mathbf{x}, \mathbf{y}$-ra, akkor $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$-re és $\mathbf{y} = \mathbf{e}_j$-re is igaz minden i, j esetén. De tetszőleges M mátrixra $\mathbf{e}_i^*M\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i^TM\mathbf{e}_j = m_{ij}$, a mátrix i. sorának j. eleme, ezért A^* minden eleme megegyezik az A megfelelő elemével, vagyis $A^* = A$.

6. *Adjuk meg az*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix Schur-felbontását!

Megoldás: Legyen A a feladatban megadott mátrix. A karakterisztikus polinomja $(x-1)(x^2-4x+4)=(x-1)(x-2)^2$. A $\lambda=1$ sajátértékhez sajátvektor az $\mathbf{e}_3$, és ezt könnyen kiegészíthetjük ortonormált bázissá: $\{\,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\,\}$, tehát először a $Q_1=[\mathbf{e}_3\,\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_2]$ mátrixot használjuk:

$$Q_1^{-1}AQ_1=Q_1^TAQ_1=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&3&0\\-4&7&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-4&7\\0&1&1\\0&-1&3\end{bmatrix}.$$

A jobb alsó sarokban levő 2×2-es mátrixnak sajátértéke a 2, amelyhez tartozó sajátvektor $(1,1)$, így ennek a háromszög alakra hozásához az $\{\,\frac{1}{\sqrt2}(1,1),\frac{1}{\sqrt2}(1,-1)\,\}$ bázist használjuk, miközben az első koordinátán triviálisan hatunk.

$$Q_2^TQ_1^TAQ_1Q_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\0&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-4&7\\0&1&1\\0&-1&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\0&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&\frac{3}{\sqrt2}&-\frac{11}{\sqrt2}\\0&2&-2\\0&0&2\end{bmatrix}$$

7. *Az* $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ *mátrix önadjungált és unitér (így persze normális is). Keressünk egy olyan B mátrixot, amely hasonló A-hoz, és még csak nem is normális!*

Megoldás: Bármely olyan nem normális 2×2-es mátrix megfelel B-nek, amelynek a sajátértékei 1 és -1, mert az diagonalizálható, és A a diagonális alakja. Legkönnyebb egy ilyen mátrixot a háromszögmátrixok között keresni, akkor csak az kell, hogy 1 és -1 legyenek az átlójában (és ne legyen normális). Például a 4. feladat D mátrixa megfelel.