1. *Bizonyítsuk be, hogy egy $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix pontosan akkor ferdén önadjungált, ha iA önadjungált.*
Megoldás: $(iA)^* = \bar{i}A^* = -iA^*$, tehát
A ferdén öndajungált $\Leftrightarrow A^* = -A \Leftrightarrow -iA^* = iA \Leftrightarrow (iA)^* = iA \Leftrightarrow iA$ öndajungált.

2. *Az alábbiak közül melyik mátrix hozható valós vagy komplex diagonális alakra? Lehet-e a diagonalizáló mátrix unitér/ortogonális?*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Az A mátrix diagonalizálható $\mathbb{R}$ fölött is, mert van n különböző valós sajátértéke, de nem lehet unitéren diagonalizálható, mert valós sajátértékek esetén ennek önadjungáltnak kellene lennie, és láthatóan nem az (vagy hivatkozhatunk az 1. feladatbeli lemmára).
B unitér, tehát unitéren is diagonalizálható. Viszont a diagonális alak nem lehet valós, mert akkor a mátrix önadjungált (azaz valós lévén szimmetrikus) lenne.
C háromszögmátrix, ezért leolvasható róla, hogy csak az 1 a sajátértéke, háromszoros algebrai multiplicitással. Ha diagonalizálható lenne, akkor az I mátrixhoz lenne hasonló, de az I-nek minden konjugáltja önmaga. Tehát C egyáltalán nem diagonalizálható.
D öndajungált, ezért unitéren valós diagonális alakra hozható. Összefoglalva:

	A	B	C	D
diag. alak $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$-$	$\mathbb{R}$
unitéren diag.-ható?	n	i	n	i

3. *a) Mutassuk meg, hogy a következő mátrixok ortogonálisan hasonlók.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Határozzuk meg a hasonlóság ortogonális mátrixát!
c) Határozzuk meg A karakterisztikus polinomját!

Megoldás: a) Mivel a mátrix szimmetrikus, a főtengelytétel szerint ortogonálisan diagonalizálható. Csak a sajátértékeket kell meghatározni. Látható, hogy $r(A) = 1$, így a 0-hoz tartozó sajátaltér dimenziója $4-1 = 3$. Tehát a 0 háromszoros sajátérték, s mivel a nyom 4, a negyedik sajátérték csak 4 lehet, vagyis A diagonális alakja valóban D. (Mellesleg, könnyen látható is, hogy minden sorösszeg 4, így az $(1, 1, 1, 1)$ vektor sajátvektor, $\lambda = 4$ sajátértékkel.)

b) A 0-hoz tartozó sajátaltér az $(1, 1, 1, 1)^\perp =: W$, tehát merőleges a 4-hez tartozó sajátvektorra (ez a normalitásból is következik). Csak W-hez kell ortogonális bázist találni. Ezt megoldhatjuk a Gauss-eliminációból kapott $\{(-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$ bázis ortogonalizálásával, vagy eleve az $(1, 1, 1, 1)$ ortogonális kiegészítésével, de kereshetünk szép bázist: az $(1, 1, 1, 1)$-re merőleges $(\pm1, \pm1, \pm1, \pm1)$ vektorok közül (tehát amelyekben két plusz és két minusz van) könnyen kiválogathatunk egymásra merőlegeseket: $\{(1, 1, -1, -1), (1, -1, 1, -1), (1, -1, -1, 1)\}$. Az $\mathbb{R}^4$ így kapott bázisát lenormálva a következő ortogonális áttérési mátrixot kapjuk:

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) Hasonló mátrixok karakterisztikus megegyezik, ezért elég ezt a D-re felírni, és D-ből egyszerűen leolvasható, hogy a karakterisztikus polinom $(x-4)x^3$.

4. *Milyen kúpszeletet írnak le az alábbi egyenletek? Változtassuk meg a koordinátarendszert úgy, hogy az egyenletek $a(x')^2 + b(y')^2 = c$ alakúak legyenek!*
a) $x^2 - 4xy + y^2 + 6y - 2 = 0$
b) $xy = 1$

Megoldás: a) Teljes négyzetté való kiegészítéssel: $x^2 - 4xy + y^2 + 6y - 2 = (x - 2y)^2 - 3y^2 + 6y - 2 = (x - 2y)^2 - 3(y - 1)^2 + 1$, tehát az $x' = x - 2y$ és $y' = y - 1$ helyettesítéssel a görbe egyenlete $(x')^2 - 3(y')^2 = -1$. Ez egy hiperbola egyenlete, de a koordinátatranszformáció nem egybevágóság:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' + 2y' + 2 \\ y' + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

tehát az új koordinátarendszert úgy kapjuk meg a régiből, hogy az $(1, 0)$ és $(0, 1)$ bázisvektorok helyett az $(1, 0)$, $(2, 1)$-et választjuk, és az origót a $(2, 1)$ pontba toljuk. A későbbi módszerekkel el lehet érni, hogy az egyenletben szereplő kifejezést egybevágósági transzformációval hozzuk négyzetösszeg alakra.

b) $xy = \frac{1}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2 = 1$, azaz az $x' = x+y$ és $y' = x-y$, vagy másképpen $x = \frac{1}{2}(x'+y')$ és $y = \frac{1}{2}(x' - y')$ koordinátatranszformációval az $(x')^2 - (y')^2 = 4$ alakra jutunk. Itt az áttérés lineáris transzformáció, amelynek mátrixa $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Ez ugyan nem ortogonális, de ha helyette a $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ mátrixot használjuk, akkor az $(x')^2 - (y')^2 = 2$ hiperbola-egyenletet kapjuk, és ez már mérettartó transzformáció.

Egy φ bilineáris függvény elfajuló, ha van olyan $\mathbf{v} \neq 0$ vektor, amelyre $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ minden $\mathbf{x}$-re, vagy ekvivalensen, ha a mátrixa nem invertálható.

5. *Hozzuk diagonális alakra az alábbi kvadratikus alakokat! Adjunk meg egy-egy bázist, amelyben diagonális alakúak! Döntsük el, hogy milyen a jellegük! Adjunk meg olyan bilineáris függvényeket, melyekhez ezek tartoznak! Elfajulóak-e ezek a bilineáris függvények?*
a) $x_1^2 + x_1x_2$
b) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$

Megoldás: A kvadratikus alak mátrixát diagonalizálhatjuk ortogonális transzformációval (mivel Q ortogonálisra $Q^{-1}AQ = Q^TAQ$) vagy szimultán sor-oszlopműveletekkel.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ karakterisztikus polinomja $x^2 - x - \frac{1}{4}$, sajátértékei $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{2})$ (már ebből is leolvasható, hogy a kvadratikus alak indefinit), ortonormált sajátbázisa $\left\{\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}(1 + \sqrt{2}, 1),\ \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}(1 - \sqrt{2}, 1)\right\}$, és ebben a diagonális alakja $\operatorname{diag}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$.
Lényegesen szebb alakot kapunk szimultán sor-oszlopműveletekkel. Itt az áttérés mátrixát úgy kaphatjuk meg, ha az I egységmátrixra is végrehajtjuk az elvégzett oszlopműveleteket, azaz miközben A-ból P^TAP lesz, I-ből $IP = P$.

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \overset{sor}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad \text{a diagonális alak,}$$

és az áttérés mátrixa: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = P$. Tehát ezt a diagonális alakot kapjuk a $\mathcal{B} = \{(1, 0), (-\frac{1}{2}, 1)\}$ bázisban. De vannak olyan esetek, mint például egy másodfokú görbe kanonikus alakra hozása, amikor elengedhetetlen, hogy ortogonális transzformációt használjunk a diagonalizáláshoz, hogy ne torzítsuk a görbét.

b) Szimultán sor-oszlopműveletekkel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \overset{sor}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \overset{sor}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ebből leolvasható, hogy a kvadratikus alak pozitív definit, egyik diagonális alakja az egységmátrix, és az ehhez tartozó áttérési mátrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P,$$

tehát az új bázis $\mathcal{B} = \{(1,0,0), (-1,1,0), (2,-2,1)\}$.
Ellenőrizhetjük, hogy $P^T AP = I$ a diagonális alak.

Többféle bilineáris függvényt is találhatunk, amely ugyanezt a kvadratikus alakot adja, bár közülük csak egy szimmetrikus.

a) A lehetséges bilineáris függvények mátrixai $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 1-a & 0 \end{bmatrix}$, ahol $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ezek közül 0 determinánsút kapunk, ha $a = 0$ vagy $a = 1$, tehát az $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ elfajulók, a többi nem.

b) A lehetséges bilineáris függvények mátrixai:

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 2-a & 2 & c \\ -b & 4-c & 5 \end{bmatrix},$$

de semelyik sem lehet elfajuló, mivel a kvadratikus alak pozitív definit. Ha egy bilineáris függvény elfajuló, azaz van olyan $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, amelyre $\mathbf{x}^T B\mathbf{y} = 0$ minden $\mathbf{x}$-re, akkor $\mathbf{y}^T B\mathbf{y} = 0$, tehát a kvadratikus alak nem lehet se pozítív, se negatív definit.

6. *a) Mi a $\varphi((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_2y_2$ bilineáris függvény Gram-mátrixa a standard bázisban és az $\{(1,1),(0,1)\}$ bázisban? Elfajuló-e ez a bilineáris függvény?*
b) Mi a hozzá tartozó kvadratikus alak?
c) Mit mondhatunk a kvadratikus alak jellegéről?

Megoldás: a) A φ Gram-mátrixa a standard és a másik bázisban

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{illetve} \quad P^T AP = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nem elfajuló, mert a mátrix determinánsa nem 0.

b) A kvadratikus alak $\varphi((x_1,x_2),(x_1,x_2)) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$.

c) A kvadratikus alak mátrixa $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, amelynek sajátértékei $0, 2$, tehát a kvadratikus alak pozitív szemidefinit.

7. *Egy valós bilineáris függvény Gram-mátrixa standard bázisban $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$*
a) Határozzuk meg, a hozzá tartozó kvadratikus alak mátrixát és jellegét!
b) Adjunk meg $\mathbb{R}^2$-ben olyan bázist, amelyben a kvardatikus alak négyzetösszeg, és írjuk fel ebben a bázisban a kvadratikus alakot!

Megoldás:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 4 \end{bmatrix} \overset{sor}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{9}{4} \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{9}{4} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = P.$$

Tehát a kvadratikus alak indefinit, az új bázis $\mathcal{B} = \{(1,0),\ (-\frac{5}{2},1)\}$. A kvadratikus alak a standard bázisban $x_1^2 + 5x_1x_2 + x_2^2$, a $\mathcal{B}$-ben felírt négyzetösszeg alakja pedig $(x_1')^2 - \frac{9}{4}(x_2')^2$, ahol $\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + \frac{5}{2}x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

8. *Hozzuk kanonikus alakra az* $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$ *egyenletű másodrendű görbe egyenletét és ábrázoljuk a görbét és az új koordinátarendszer tengelyeit az eredeti koordinátarendszerben!*

Megoldás: Olyan derékszörgű koordinátarendszert kell választanunk, amelyben a polinom kvadratikus része a koordináták négyzeteinek lineáris kombinációja. Tehát ortogonális mátrixszal kell a kvadratikus alak $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ mátrixát diagonális alakra hozni. Mivel $D = Q^{-1}AQ = Q^TAQ$, a Q-val való konjugálás a kvadratikus alakot is négyzetösszeg alakra hozza:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow [\,x \quad y\,]\, A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [\,x' \quad y'\,]\, Q^T A Q \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = [\,x' \quad y'\,]\, D \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

A sajátértékei 9 és 1, a hozzátartozó ortonormált sajátbázis $\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1) \}$, és $Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, amiből $5x^2+8xy+5y^2 = 9(x')^2+(y')^2$, és az

$$[\,x \quad y\,]\, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \end{bmatrix}$$

koordinátacserével a görbe egyenlete $0 = 5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9 = 9(x')^2+(y')^2-9\sqrt{2}(x'-y')-9\sqrt{2}(x'+y')+9 = 9((x')^2-2\sqrt{2}x')+(y')^2+9 = 9(x'-\sqrt{2})^2+(y')^2-9$ teljes négyzetekké való kiegészítéssel, amiből egy $x'' = x'-\sqrt{2}$ és $y'' = y'$ eltolással az

$$(x'')^2 + \left(\frac{y''}{3}\right)^2 = 1$$

kanonikus alakhoz jutunk. Ez egy ellipszis egyenlete, amelynek (az új koordinátarendszerben) a középpontja az origó, a vízszintes féltengelye 1, a függőleges 3 hosszú. A régiben ezek a tengelyek az $(1,1)$, illetve $(-1,1)$ bázisvektorokkal párhuzamosak, de a méretük ugyanakkora, mivel ortogonális transzformációt alkalmaztunk, és a középpont egyenlete az $x''=0$, $y''=0$ értékekből visszaszámolva $(x,y)^T = Q(x',y')^T = Q(\sqrt{2},0)^T = (0,1)^T$.