1. *Mutassuk meg, hogy az $n \times n$-es ortogonális mátrixok csoportot alkotnak, azaz ortogonális mátrixok szorzata ortogonális, inverze ortogonális és az egységmátrix ortogonális.*

Megoldás: Ha $A^{-1} = A^T$ és $B^{-1} = B^T$, akkor $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^TA^T = (AB)^T$, $(A^{-1})^{-1} = (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, és $I^{-1} = I = I^T$.

2. *Melyik szemiortogonális az alábbi mátrixok közül? A szemiortogonálisoknak melyik oldali inverze létezik? Adjuk is meg a megfelelő egyoldali inverzeket!*

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Megoldás: B nem szemiortogonális, mert bár a sorai és oszlopai is ortogonálisak, nem alkotnak ortonormált rendszert. A oszlopai viszont ortonormált rendszert alkotnak, így A (az oszlopokra nézve) szemiortogonális, és $A^TA = I$. Ez azt jelenti, hogy A bal inverze A^T.

3. *Legyen* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$. *Határozzuk meg az A mátrix QR-felbontását, valamint teljes QR-felbontását Gram–Schmidt-féle ortogonalizációval!*

Megoldás: Ortogonalizáljuk a mátrix oszlopait, azaz az $\mathbf{a}_1 = (1,-1,1,-1)$, $\mathbf{a}_2 = (3,3,3,3)$ és $\mathbf{a}_3 = (9,1,5,-3)$ vektorokat. Az ortogonalizálás során szabad a kapott ortogonális vektorokat pozitív skalárral megszorozni, mert attól még a hozzá tartozó ortonormált rendszer ugyanaz lesz.
$\mathbf{c}_1 = \mathbf{a}_1 = (1,-1,1,-1)$.
$\mathbf{c}_2' = (3,3,3,3) - \frac{0}{4}(1,-1,1,-1) = (3,3,3,3)$, így $\mathbf{c}_2 = (1,1,1,1)$ is lehet.
$\mathbf{c}_3' = (9,1,5,-3) - \frac{16}{4}(1,-1,1,-1) - \frac{12}{4}(1,1,1,1) = (2,2,-2,-2)$, így $\mathbf{c}_3 = (1,1,-1,-1)$.
A megfelelő ortonormált rendszer így
$\mathbf{q}_1 = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1)$, $\mathbf{q}_2 = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$, $\mathbf{q}_3 = \frac{1}{2}(1,1,-1,-1)$. Ebből

$$Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow R = Q^TA = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

A teljes felbontáshoz Q-t kell kiegészíteni ortogonális mátrixszá, például egy negyedik, független vektor ortogonalizálásával: $(1,0,0,0) - \frac{1}{4}(1,-1,1,-1) - \frac{1}{4}(1,1,1,1) - \frac{1}{4}(1,1,-1,-1) = \frac{1}{4}(1,-1,-1,1) \Rightarrow$ a negyedik vektor $\frac{1}{2}(1,-1,-1,1)$, és a felbontás

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. *a) Írjuk fel azt a 2×2-es forgatásmátrixot, amely az $(1,2)$ vektort elforgatja a $(\sqrt{5},0)$ vektorba!*

b) Írjuk fel a $\mathbf{v} = (1,-1,1,-1)$ normálvektorú hipersíkra való Householder-tükrözés standard mátrixát!

c) Írjuk fel annak a Householder-tükrözésnek a mátrixát, amely a $v = (1,-1,1,-1)$ vektort olyan vektorba viszi, amelynek csak az első koordinátája nem nulla, és az első koordináta negatív! Milyen normálvektorú hipersíkra tükröz ez a transzformáció?

Megoldás: a) A forgatásmátrix $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

b) A tükrözés mátrixa $I - \frac{2}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $|\mathbf{v}| = 2$, így a hipersík normálvektora $(-2,0,0,0) - (1,-1,1,-1) = (-3,1,-1,1)$, és a tükrözés mátrixa $I - \frac{2}{12}\begin{bmatrix} 9 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -3 & 3 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

5. *Határozzuk meg az* $A = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 7 \\ 3 & 10 & 1 \\ 0 & -12 & 1 \end{bmatrix}$ *mátrix QR-felbontását Givens-forgatások segítségével!*

Megoldás:

$$Q_1 A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -4 & 3 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & -5 & 7 \\ 3 & 10 & 1 \\ 0 & -12 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & -5 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -12 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_2 Q_1 A = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -12 \\ 0 & 12 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 10 & -5 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -12 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & -5 \\ 0 & 13 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

A kapott mátrix ugyan felső háromszög alakú, de nem elégíti ki azt a feltételt, hogy a diagonális elemei pozitívak legyenek. Ennek eléréséhez a végén még egy tükrözést is kell használni (mivel $\det A < 0$, a forgatások pedig irányítástartók, azaz pozitív determinánsúak, nem is volt esély arra, hogy csupán forgatásokkal megkaphassuk az R mátrixot).

$$Q_3 Q_2 Q_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 10 & -5 \\ 0 & 13 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & -5 \\ 0 & 13 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = R, \text{ és}$$

$$Q = (Q_3 Q_2 Q_1)^T = Q_1^T Q_2^T Q_3^T = \frac{1}{65}\begin{bmatrix} -52 & 15 & 36 \\ 39 & 20 & 48 \\ 0 & -60 & 25 \end{bmatrix}\text{-re } A = QR.$$

6. *Határozzuk meg az* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ *mátrix QR-felbontását Householder-tükrözések segítségével!*

Megoldás: Az első tükrözés az $(1,-2,2)$ vektort viszi a $(3,0,0)$-ba, azaz a $(2,2,-2)$, vagy kényelmesebben az $(1,1,-1)$ normálvektorú síkra tükrözünk.

$$Q_1 A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

A második tükrözés az első koordinátát helybenhagyva az yz-sík $(4,3)$ vektorát viszi az $(5,0)$ vektorba. Ez az yz-síkon az $(1,-3)$ normálvektorú egyenesre való tükrözés, amelynek mátrixa $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$, tehát

$$Q_2Q_1A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Végül a z tengelyen kell egy tükrözést végrehajtanunk, míg az x, y koordinátasíkot helybenhagyjuk.

$$Q_3Q_2Q_1A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R$$

és

$$Q = (Q_3Q_2Q_1)^{-1} = Q_1^TQ_2^TQ_3^T = Q_1Q_2Q_3 = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 14 \\ -10 & 10 & 5 \\ 10 & 11 & -2 \end{bmatrix} \text{-re } A = QR$$

(Itt $Q_i^T = Q_i$, mert a tükröző mátrixok szimmetrikusak.)

7. *Tekintsük a 3. feladatbeli A mátrixot. Határozzuk meg az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer egyetlen legjobban közelítő megoldását QR-felbontás segítségével, ha* $\mathbf{b} = (0,0,0,1)$. *Miért van csak egy legjobban közelítő megoldás?*

Megoldás: Az $R\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b}$ egyenletet kell megoldanunk:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 5/24 \\ -1/8 \end{bmatrix}$$

8. *Adjunk példát arra, hogy a Householder-tükrözéseket, illetve a Givens-forgatásokat használó módszer két különböző teljes QR-felbontásra vezethet. Speciálisan, ha $A \in \mathbb{R}^{m\times 1}$, ahol $m > 1$, és A nem eleve felső háromszögmátrix (azaz nem $(a, 0, \ldots, 0)^T$ alakú), akkor a két felbontás biztosan különbözik.*

Megoldás: Mivel A-nak csak egy oszlopa van, az első módszernél egyetlen tükrözés szerepel, és ennek a determinánsa a sajátértékek szorzata, azaz -1, így a felbontásban szereplő Q ortogonális mátrix determinánsa is -1. Viszont a Givens-forgatások determinánsa 1, és itt $m > 1$ miatt sikerül is csak Givens-forgatásokkal eljutni az R mátrixig, tehát a felbontásban szereplő Q (a Givens-forgatások transzponáltjának a szorzata) 1 determinánsú.