

1. Számítsuk ki az $\mathbf{a} = (1, i, 1 + i)$ és $\mathbf{b} = (1 - i, i, 1 + i)$ vektorok skaláris szorzatát és távolságát!

Megoldás: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 1(1 - i) - i \cdot i + (1 - i)(1 + i) = 4 - i$.

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = |(i, 0, 0)| = 1.$$

2. Ortogonalizáljuk a \mathbb{C}^3 -beli $\{(i, 0, 1), (1, i, 1 + i)\}$ vektorrendszert, és egészítsük ki \mathbb{C}^3 ortogonális bázisává! Tegyük ortonormálttá ezt a bázist!

Megoldás: Egészítsük ki rögtön bázissá a $\mathbf{b}_1 = (i, 0, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (1, i, 1 + i)$ vektorrendszert, mondjuk, a $\mathbf{b}_3 = (0, 0, 1)$ vektorral, és ezt a bázist ortogonalizáljuk, akkor az új bázis első két vektora az eredeti vektorrendszer ortogonalizáltja lesz.

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_1 = (i, 0, 1),$$

$$\mathbf{c}'_2 = \mathbf{b}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{c}_1 = (1 - \frac{1}{2}i, i, \frac{1}{2} + i). \text{ Legyen } \mathbf{c}_2 = 2\mathbf{c}'_2 = (2 - i, 2i, 1 + 2i).$$

$$\mathbf{c}'_3 = \mathbf{b}_3 - \frac{1}{2}\mathbf{c}_1 - \frac{1-2i}{14}\mathbf{c}_2 = (0, 0, 1) - \frac{1}{2}(i, 0, 1) - \frac{1}{14}(-5i, 4 + 2i, 5) = \frac{1}{7}(-i, -2 - i, 1).$$

$$\text{Legyen } \mathbf{c}_3 = (-i, -2 - i, 1).$$

Tehát az eredeti vektorrendszer ortogonalizáltja $\{(i, 0, 1), (2 - i, 2i, 1 + 2i)\}$, az ennek kiegészítésével kapott ortogonális bázis $\{(i, 0, 1), (2 - i, 2i, 1 + 2i), (-i, -2 - i, 1)\}$, az ortonormált pedig $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(i, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{14}}(2 - i, 2i, 1 + 2i), \frac{1}{\sqrt{7}}(-i, -2 - i, 1)\}$.

3. Legyen $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{x} + i\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ vektor pontosan akkor merőleges a konjugáltjára, ha \mathbf{x} és \mathbf{y} a valós euklideszi térben azonos hosszúságú, egymásra merőleges vektorok!

Megoldás:

$$\langle \mathbf{x} - i\mathbf{y}, \mathbf{x} + i\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, i\mathbf{y} \rangle + \langle -i\mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle -i\mathbf{y}, i\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + i\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + i\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + i \cdot i \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle =$$

$$= |\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{y}|^2 + i\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + i\overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle} = |\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{y}|^2 + 2i\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0 \Leftrightarrow |\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{y}|^2 = 0 \text{ és } \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow |\mathbf{x}| = |\mathbf{y}| \text{ és } \mathbf{x} \perp \mathbf{y}.$$

4. Döntsük el az alábbi mátrixok mindegyikéről, hogy önadjungált, ferdén önadjungált, unitér, illetve normális-e?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Megoldás: B önadjungált, ezért normális is, de nem ferdén önadjungált, és nem unitér. C unitér, ezért normális is, de nem önadjungált, és nem is ferdén önadjungált. A nem unitér, nem önadjungált, és nem ferdén önadjungált. A normalitást ellenőrizhetjük az $A^*A = AA^*$ egyenlőséggel, vagy észrevehetjük, hogy A egy unitér (és így normális) mátrix skalárszorosa, ezért maga is normális. Végül D szintén nem önadjungált, ferdén önadjungált vagy unitér, és a normalitást ellenőrizve azt látjuk, hogy $D^*D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, míg $DD^* = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, ezért D nem is normális.

5. Adjuk meg az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix Schur-felbontását!

Megoldás: Legyen A a feladatban megadott mátrix. A karakterisztikus polinomja $(x - 1)(x^2 - 4x + 4) = (x - 1)(x - 2)^2$. A $\lambda = 1$ sajátértékhez sajátvektor az \mathbf{e}_3 , és ezt könnyen kiegészíthetjük ortonormált bázissá: $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\}$, tehát először a $Q_1 = [\mathbf{e}_3 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_1]$ mátrixot használjuk:

$$Q_1^{-1}AQ_1 = Q_1^T AQ_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -4 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A jobb alsó sarokban levő 2×2 -es mátrixnak sajátértéke a 2, amelyhez tartozó sajátvektor $(1, 1)$, így ennek a háromszög alakra hozásához az $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)\}$ bázist használjuk, miközben az első koordinátán triviálisan hatunk.

$$Q_2^T Q_1^T A Q_1 Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 7 & -4 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{11}{\sqrt{2}} \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

6. Az $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ mátrix önadjungált és unitér (így persze normális is). Keressünk egy olyan B mátrixot, amely hasonló A -hoz, és még csak nem is normális!

Megoldás: Bármely olyan nem normális 2×2 -es mátrix megfelel B -nek, amelynek a sajátértékei 1 és -1 , mert az diagonalizálható, és A a diagonális alakja. Legkönnyebb egy ilyen mátrixot a háromszögmátrixok között keresni, akkor csak az kell, hogy 1 és -1 legyenek az átlójában. Ráadásul egy olyan háromszögmátrix, amely nem diagonális semmiképpen sem lehet normális. Tehát például az $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ mátrix megfelel.

7. a) Mutassuk meg, hogy a következő mátrixok ortogonálisan hasonlók.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- b) Határozzuk meg a hasonlóság ortogonális mátrixát!
c) Határozzuk meg A karakterisztikus polinomját!

Megoldás: a) Mivel a mátrix szimmetrikus, a főtengetéltétel szerint ortogonálisan diagonalizálható.

Csak a sajátértékeket kell meghatározni. Látható, hogy $r(A) = 1$, így a 0-hoz tartozó sajátaltér dimenziója $4 - 1 = 3$. Tehát a 0 háromszoros sajátérték, s mivel a nyom 4, a negyedik sajátérték csak 4 lehet, vagyis A diagonális alakja valóban D . (Mellesleg, könnyen látható is, hogy minden sorösszeg 4, így az $(1, 1, 1, 1)$ vektor sajátvektor, $\lambda = 4$ sajátértékkel.)

- b) A 0-hoz tartozó sajátaltér az $(1, 1, 1, 1)^\perp =: W$, tehát merőleges a 4-hez tartozó sajátvektorra (ez a normalitásból is következik). Csak W -hez kell ortogonális bázist találni. Ezt megoldhatjuk a Gauss-eliminációból kapott $\{(-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$ bázis ortogonalizálásával, vagy eleve az $(1, 1, 1, 1)$ ortogonális kiegészítésével, de kereshetünk szép bázist: az $(1, 1, 1, 1)$ -re merőleges $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$ vektorok közül (tehát amelyekben két plusz és két mínusz van) könnyen kiválogathatunk egymásra merőlegeseket: $\{(1, 1, -1, -1), (1, -1, 1, -1), (1, -1, -1, 1)\}$. Az \mathbb{R}^4 így kapott bázisát lenormálva a következő ortogonális áttérési mátrixot kapjuk:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- c) Hasonló mátrixok karakterisztikus polinomja megegyezik, ezért elég ezt a D -re felírni, és D -ből egyszerűen leolvasható, hogy a karakterisztikus polinom $(x - 4)x^3$.