1. *Bizonyítsuk be, hogy egy $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix pontosan akkor ferdén önadjungált, ha iA önadjungált.*

Megoldás: $(iA)^* = \bar{i}A^* = -iA^*$, tehát
A ferdén öndajungált $\Leftrightarrow A^* = -A \Leftrightarrow -iA^* = iA \Leftrightarrow (iA)^* = iA \Leftrightarrow iA$ öndajungált.

2. *Bizonyítsuk be, hogy normális mátrix különböző sajátértékeihez tartozó sajátalterei merőlegesek egymásra, pontosabban*

a) $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ pontosan akkor normális, ha $\mathbb{C}^n$ az A sajátaltereinek ortogonális direkt összege (azaz a komponensek páronként merőlegesek egymásra);

b) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pontosan akkor szimmetrikus, ha $\mathbb{R}^n$ az A sajátaltereinek ortogonális direkt összege

Megoldás: a) Tegyük fel, hogy A normális, és legyenek a különböző sajátértékei $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. A spektráltétel miatt van A-hoz $\mathbb{C}^n$-nek ortonormált sajátbázisa. Legyen U_i az ezek közül a λ_i-hez tartozó sajátvektorok által kifeszített altér. Ekkor $V = \mathbb{C}^n$ az U_i-k ortogonális direkt összege. Másrészt $U_i \le V_{\lambda_i}$ minden i-re, így $n = \sum \dim U_i \le \sum \dim V_{\lambda_i} \le n$, tehát $U_i = V_{\lambda_i}$ $\forall i$, azaz $\mathbb{C}^n$ a V_{λ_i}-k ortogonális direkt összege. Ebből következik, hogy a különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok merőlegesek egymásra.
Fordítva, ha $\mathbb{C}^n = \oplus V_{\lambda_i}$ ortogonális direkt összeg, akkor a sajátalterek egy-egy ortonormált bázisának (amelyek léteznek, mert V_{λ_i}-k is euklideszi terek) uniója V-ben ortonormált sajátbázis, így A normális.

b) Ugyanúgy, mint a komplex esetben, csak itt a valós főtengelytétel következményét kell használni: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pontosan akkor szimmetrikus, ha $\mathbb{R}^n$-ben van A-hoz tartozó ortonormált sajátbázis.

3. *Az alábbiak közül melyik mátrix hozható valós vagy komplex diagonális alakra? Lehet-e a diagonalizáló mátrix unitér/ortogonális?*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Az A mátrix diagonalizálható $\mathbb{R}$ fölött is, mert van 3 különböző valós sajátértéke a 3×3-as mátrixnak, de nem lehet unitéren diagonalizálható, mert akkor normális lenne, de háromszögmátrix csak akkor lehet normális, ha diagonális.
B unitér, tehát unitéren is diagonalizálható. Viszont a diagonális alak nem lehet valós, mert akkor a mátrix önadjungált (azaz valós lévén szimmetrikus) lenne.
C háromszögmátrix, ezért leolvasható róla, hogy csak az 1 a sajátértéke, háromszoros algebrai multiplicitással. Ha diagonalizálható lenne, akkor az I mátrixhoz lenne hasonló, de az I-nek minden konjugáltja önmaga. Tehát C egyáltalán nem diagonalizálható.
D öndajungált, ezért unitéren valós diagonális alakra hozható. Összefoglalva:

	A	B	C	D
diag. alak $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$-$	$\mathbb{R}$
unitéren diag.-ható?	n	i	n	i

4. *Milyen kúpszeletet írnak le az alábbi egyenletek? Változtassuk meg a koordinátarendszert úgy, hogy az egyenletek $a(x')^2 + b(y')^2 = c$ alakúak legyenek!*

a) $x^2 - 4xy + y^2 + 6y - 2 = 0$

b) $xy = 1$

Megoldás: a) Teljes négyzetté való kiegészítéssel: $x^2 - 4xy + y^2 + 6y - 2 = (x-2y)^2 - 3y^2 + 6y - 2 = (x-2y)^2 - 3(y-1)^2 + 1$, tehát az $x' = x - 2y$ és $y' = y - 1$ helyettesítéssel a görbe egyenlete $(x')^2 - 3(y')^2 = -1$. Ez egy hiperbola egyenlete, de a koordinátatranszformáció nem egybevágóság:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' + 2y' + 2 \\ y' + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

tehát az új koordinátarendszert úgy kapjuk meg a régiből, hogy az $(1,0)$ és $(0,1)$ bázisvektorok helyett az $(1,0)$, $(2,1)$-et választjuk, és az origót a $(2,1)$ pontba toljuk. (Ortogonális transzformációval és eltolással is lehet diagonalizálni, ha pontosan szeretnénk ábrázolni a görbét, mint a 6. feladatban.)

b) $xy = \frac{1}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2 = 1$, azaz az $x' = x+y$ és $y' = x-y$, vagy másképpen $x = \frac{1}{2}(x'+y')$ és $y = \frac{1}{2}(x'-y')$ koordinátatranszformációval az $(x')^2 - (y')^2 = 4$ alakra jutunk. Itt az áttérés lineáris transzformáció, amelynek mátrixa $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Ez ugyan nem ortogonális, de ha helyette a $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ mátrixot használjuk, akkor az $(x')^2 - (y')^2 = 2$ hiperbola-egyenletet kapjuk, és ez már mérettartó transzformáció.

5. *Hozzuk diagonális alakra az $x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$ kvadratikus alakot! Adjunk meg egy bázist, amelyben diagonális alakú!*

Megoldás: A kvadratikus alak mátrixa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$k_A(x) = -(x-3)(x-1)x$, és az egyes sajátértékekhez tartozó egy-egy normált sajátvektor: $\lambda_1 = 3$-hoz $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)$, $\lambda_2 = 1$-hez $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$, és $\lambda_3 = 0$-hoz $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$ ortonormált bázist alkotnak. Tehát

$$Q = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \text{-re } Q^{-1}AQ = Q^TAQ = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A kvadratikus alak az új bázisban $3(x_1')^2 + (x_2')^2$.

6. *Hozzuk kanonikus alakra az $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$ egyenletű másodrendű görbe egyenletét és ábrázoljuk a görbét és az új koordinátarendszer tengelyeit az eredeti koordinátarendszerben!*

Megoldás: Az egyenlet mátrixos felírása:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -18 & -18 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 9 = 0.$$

A kvadratikus alak $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ mátrixát ortogonálisan diagonalizáljuk.

A sajátértékei 9 és 1, a hozzá tartozó ortonormált sajátbázis $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)\}$,

és a $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ortogonális mátrixszal $Q^{-1}AQ = Q^TAQ = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Áttérve az új bázisra:

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$. Az egyenlet az új koordinátarendszerben:

$$0 = \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} Q^TAQ \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -18 & -18 \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 9 = 9(x')^2 + (y')^2 + \begin{bmatrix} -18\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 9 =$$

$$= 9(x')^2 + (y')^2 - 18\sqrt{2}x' + 9 = 9(x'-\sqrt{2})^2 + (y')^2 - 9,$$

amiből egy $x'' = x' - \sqrt{2}$ és $y'' = y'$ eltolással az

$$(x'')^2 + \left(\frac{y''}{3}\right)^2 = 1$$

kanonikus alakhoz jutunk. Ez egy ellipszis egyenlete, amelynek (az új koordinátarendszerben) a középpontja az origó, a vízszintes féltengelye 1, a függőleges 3 hosszú. A régiben ezek a tengelyek az $(1,1)$, illetve $(-1,1)$ bázisvektorokkal párhuzamosak, de a méretük ugyanakkora, mivel ortogonális transzformációt alkalmaztunk, és a középpont egyenlete az $x'' = 0$, $y'' = 0$ értékekből visszaszámolva $(x,y)^T = Q(x',y')^T = Q(\sqrt{2},0)^T = (1,1)^T$.