1. *Határozzuk meg az alábbi mátrixok redukált SVD-felbontását!*

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

Megoldás: a) Mivel az A mátrix önadjungált (elég, hogy normális), tartozik hozzá ortonormált sajátbázis, sőt ezt vehetjük úgy, hogy a megfelelő sajátértékek abszolút értékei csökkenőek legyenek: -2-höz $(0,1)$, 1-hez $(1,0)$ tartozik. Így a $V = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrixszal

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A diagonális mátrixban módosíthatjuk az előjeleket egy unitér mátrixszal való szorzással.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ebben a felbontásban a két szélső mátrix unitér, a középső pedig nemnegatív diagonális, amelyben a diagonális elemek fogyó sorrendben vannak, ezért ezek a diagonális elemek csak a szinguláris értékek lehetnek, és a felbontás a teljes SVD-felbontás. A redukált ugyanez, mert a mátrix teljes rangú négyzetes mátrix.

b) Itt is alkalmazhatunk egyszerűsített módszert, mivel a mátrix rangja 1. Ekkor $\mathcal{O}(V_1) = \mathcal{O}(B^*B) = \mathcal{O}(B^*) = \overline{\mathcal{S}(B)} = \langle(1,1)\rangle$, tehát $V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, és a $BV_1 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ szorzatból $U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ és $\Sigma_1 = [\,2\,]$. Tehát a redukált SVD-felbontás

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot [\,2\,] \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} [\,1 \quad 1\,].$$

c) Érdemes a mátrix transzponáltjára kiszámítani a felbontást, mert akkor kisebb mátrixra (csak 2×2-esre a 3×3-as helyett) kell sajátvektorokat keresni, és aztán a felbontást megtranszponálni.

$$C^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad CC^* = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad k_{CC^*}(x) = x^2 - 10x + 9, \quad \lambda_1 = 9,\ \lambda_2 = 1$$

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C^*V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A C^*V_1 oszlopait a megfelelő szinguláris értékekkel ($\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 3$, $\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 1$) leosztva megkapjuk a U_1 mátrixot:

$$C^* = U_1\Sigma_1V_1^* = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Így az eredeti mátrix redukált SVD-felbontása:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

2. *Írjuk fel az 1. feladatbeli B és C mátrixok teljes SVD-felbontását és a C mátrix SVD-felbontásának diadikus alakját!*

Megoldás: A B teljes SVD-felbontásához tetszőlegesen kiegészítjük a redukált felbontásbeli szemiortogonális mátrixokat ortogonálissá, és a Σ_1-et B-vel megegyező méretű Σ-vá:

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

A C mátrix teljes SVD-felbontása a redukált felbontás kiegészítésével:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/3\sqrt{2} & -4/3\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}.,$$

ahol az utolsó mátrix harmadik sora az első két sor vektoriális szorzata.
C diadikus felbontása a redukált SVD felbontásból

$$3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & -4 & 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \begin{bmatrix} 1/6 & 4/6 & -1/6 \\ -1/6 & -4/6 & 1/6 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

3. *Számítsuk ki az 1.-beli B és C mátrixok pszeudoinverzét az SVD-felbontás segítségével!*

Megoldás: Az $U_1\Sigma_1V_1^*$ redukált felbontású mátrix pszeudoinverze $V_1\Sigma^{-1}U_1^*$.

$$B^+ = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C^+ = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}^+ = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

4. *Számítsuk ki az 1. feladatbeli négyzetes mátrixok polárfelbontását! Melyiknek van többféle is?*

Megoldás: Ha $A = U\Sigma V^*$ teljes SVD-felbontás, akkor A polárfelbontása $A = (U\Sigma U^*)(UV^*)$.
Az 1. feladat első két mátrixára ez $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, és $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.
Az invertálható A mátrixnak egyértelmű a polárfelbontása, B polárfelbontásában viszont az ortogonális mátrix többféle is lehet, például a $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ felbontás is megfelel.

5. *Adjuk meg az 1.-beli nem 1-rangú mátrixok legjobb 1-rangú közelítését! Mekkora a közelítő mátrix eltérése Frobenius-normában?*

Megoldás: Az A mátrixra

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}. \text{ Az eltérés } \left\|\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\|_F = \sqrt{1^2+0^2+0^2+0^2} = 1,$$

vagy a tételből adódóan a kihagyott szinguláris értékek négyzetösszegének négyzetgyöke, ami $\sqrt{1^2} = 1$.
A C mátrixra

$$C^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 2 & -1/2 \\ -1/2 & -2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Az eltérés $\sqrt{\frac{1}{4}+0^2+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+0^2+\frac{1}{4}} = 1$, illetve $\sqrt{\sigma_2^2} = 1$.

6. *Írjuk fel az alábbi mátrix karakterisztikus polinomját és minimálpolinomját!*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Mivel A felső háromszögmátrix, a karakterisztikus polinom közvetlenül leolvasható belőle: $k_A(x) = -(x-1)(x-2)^2$. Az $m_A(x)$ minimálpolinom osztója ennek, de minden sajátérték gyöke $m_A(x)$-nek, így $m_A(x) = (x-1)(x-2)$ vagy $(x-1)(x-2)^2$.

$$(A-I)(A-2I) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

így $m_A(x) = (x-1)(x-2)$.
(Mellesleg ez abból is következik, hogy $\dim V_2 = 2$, így A minden sajátértékének megegyezik az algebrai és geometriai multiplicitása $\Rightarrow$ A diagonalizálható $\Rightarrow$ a minimálpolinomja a külöböző sajátértékekhez tartozó gyöktényezők szorzata.)

7. *Van-e az egységmátrixon kívül olyan mátrix $\mathbb{R}^{2\times 2}$-ben, illetve $\mathbb{Q}^{2\times 2}$-ben, amelynek az ötödik hatványa az egységmátrix?*

Megoldás: Valós mátrixból van ilyen: az origó körüli 72°-os forgatás mátrixa.
Tegyük fel, hogy $A \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$, és $A^5 = I$. Ekkor az $x^5 - 1$ polinom annullálja az A mátrixot, következésképpen $m_A(x) \mid (x^5 - 1)$. De $x^5 - 1$ irreducibilisekre bontása $\mathbb{Q}[x]$-ben $(x-1)\Phi_5(x) = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$, ezért $m_A(x)$ irreducibilis tényezői is ezek közül valók. De $\deg m_A(x) \le \deg k_A(x) = 2$, így csak $x-1$ szerepelhet $m_A(x)$-ben, s mivel x^5-1-nek osztója, $m_A(x) = x-1$, amiből $A = I$ következik. Tehát az egységmátrixon kívül nincs más ilyen racionális elemű mátrix.

8. *Lássuk be, hogy a 2×2-es mátrixok között pontosan azok hasonlók, amelyeknek megegyezik a minimálpolinomjuk, de 3×3-as mátrixokra ez már nem igaz.*

Megoldás: A minimálpolinom osztója a karakterisztikus polinomnak, ezért egy 2×2-es mátrix minimálpolinomja legföljebb másodfokú lehet.
Ha $\deg m_A(x) = 1$, azaz $m_A(x) = x - c$ alakú, akkor $A - cI = O$, azaz $A = cI$, tehát a mátrix (nemcsak hasonlóság erejéig) egyértelmű.
Tfh. $\deg m_A(x) = 2$.
Ha $m(x)$ reducibilis, azaz $m(x) = (x-c)(x-d)$ valamely $c, d \in K$-ra, akkor $c \ne d$ esetén két különböző sajátértéke van, tehát A diagonalizálható, és $A \sim \operatorname{diag}(c,d)$. Ha $c = d$, akkor c az egyetlen sajátértéke, de $\dim V_c = 1$, mert különben $x - c$ lenne a minimálpolinom. Így van olyan $\mathbf{v} \in K^2$, amely nem sajátvektora A-nak. Az ilyen $\mathbf{v}$-re $\mathbf{v}$ és $A\mathbf{v}$ lineárisan függetlenek, és az A mátrixa a $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}, A\mathbf{v}\}$ bázisban éppen az $m_A(x)$ kísérőmátrixa a kísérőmátrix konstrukciója szerint. Ezért az $(x-c)^2$ minimálpolinomú mátrixok mind hasonlók az $(x-c)^2$ kísérőmátrixához, $\begin{bmatrix} 0 & -c^2 \\ 1 & 2c \end{bmatrix}$-hez, így egymáshoz is.
Ha $m(x)$ irreducibilis, akkor nincs sajátvektora, tehát bármely $\mathbf{v} \ne \mathbf{0}$ vektorra függetlenek a $\mathbf{v}$ és $A\mathbf{v}$ vektorok, s így a $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}, A\mathbf{v}\}$ bázisban az előző esethez hasonlóan A mátrixa megegyezik az $m(x)$ kísérőmátrixával. Tehát ebben az esetben is hasonlók az $m(x)$ minimálpolinomú mátrixok.
Viszont a 3×3-as mátrixok közül $m(x) = x(x-1)$ a minimálpolinomja a $\operatorname{diag}(1,1,0)$ és a $\operatorname{diag}(1,0,0)$ mátrixnak is, amelyek nyilván nem hasonlók, mert például különböző rangúak.

9. *Hasonlóság erejéig hány olyan valós, illetve komplex 2×2-es mátrix van, amelynek a köbe az egységmátrix?*

Megoldás: Az előző feladat alapján elég megállapítanunk, hogy hányféle minimálpolinomja lehet az ilyen mátrixoknak. A minimálpolinom osztója az $x^3 - 1$ polinomnak, amelynek $\mathbb{C}$, illetve $\mathbb{R}$ fölötti irreducibilisekre bontása $(x-1)(x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)$, illetve $(x-1)(x^2+x+1)$, ahol ε egy komplex primitív harmadik egységgyök. $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ esetén $x^3 - 1$ legföljebb másodfokú osztója 6-féle lehet (aszerint, hogy melyik egyetlen vagy melyik két gyöktényező szorzata), és ilyenek valóban előfordulnak megfelelő sajátértékű diagonális mátrixként. A valós fölött csak $x-1$ vagy x^2+x+1 lehet a minimálpolinom, így kétféle mátrixot kapunk, az I-t, illetve egy az x^2+x+1 kísérőmátrixához hasonló mátrixot. (Ez utóbbi a komplex mátrixok közül $\mathbb{C}$ fölött a $\mathrm{diag}(\varepsilon, \varepsilon^2)$ mátrixhoz hasonló, a maradék négy komplex hasonlósági osztályban viszont nincs valós mátrix, pl. mert a mátrixok determinánsa $\varepsilon \cdot \varepsilon$, $\varepsilon^2 \cdot \varepsilon^2$, $1 \cdot \varepsilon$ és $1 \cdot \varepsilon^2$ sem valós.)