

1. Határozzuk meg az alábbi A mátrix Jordan-normálalakját és Jordan-bázisát, majd ennek a segítségével számítsuk ki az A^n hatványokat!

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás: $k_A(x) = -x^3 + 3x^2 - 2 - 6 - 2x + 9 - 3x + 2x = -(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = -(x - 1)^3$. Tehát A egyetlen sajátértéke az 1.

$$A - I = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

miatt $\dim V_1 = 1$, vagyis a J Jordan-normálalak egyetlen Jordan-blokkból áll. A Jordan-bázis így egyetlen Jordan-lánc, és bármely olyan vektor generálhatja, amelynek a λ -hossza 3, s mivel minden vektor általánosított sajátvektor az 1-hez, elég egy tetszőleges olyan vektort választani, amely nincs benne a $\text{Ker}(A - I)^2$ altérben.

$$(A - I)^2 \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \mapsto [1 \quad -1/2 \quad 1/2]$$

Így $\text{Ker}((A - I)^2) = \text{span}((1, 2, 0), (-1, 0, 2))$, és $\mathbf{v} = (1, 0, 0)$ ezen kívül van. A \mathbf{v} által generált Jordan-lánc

$$(4, 0, -8) \xleftarrow{A-I} (2, 2, -2) \xleftarrow{A-I} (1, 0, 0).$$

Tehát

$$A^n = P J^n P^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -8 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & n & \binom{n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 8 & -4 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4n+2 & 2n^2+1 \\ 0 & 2 & 2n \\ -8 & -8n-2 & -4n^2+2n \end{bmatrix} \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 8 & -4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2n^2+1 & -n^2+2n & n^2 \\ 2n & -n+1 & n \\ -4n^2+2n & 2n^2-5n & -2n^2+n+1 \end{bmatrix}$$

Megjegyzés: A^n -et Hermite-interpolációval is ki tudjuk számítani, a Jordan-normálalak és a Jordan-bázis meghatározása nélkül: az $f(x) = x^n$ -re kell megkeresni azt a $p(x) = a + bx + cx^2$ polinomot, amelyre $f(1) = p(1)$, $f'(1) = p'(1)$ és $f''(1) = p''(1)$, és ekkor $A^n = p(A)$.

2. Hermite-interpolációval számítsuk ki az $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ mátrixra az e^{2A} értékét!

Megoldás: $k_A(x) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$, és $m_A(x) = (x - 2)^2$. Az $f(e^{2x})$ függvényt egy $p(x) = a + bx$ legfőbb elsőfokú polinommal interpolálhatjuk.

$$\begin{array}{lll} p(x) = a + bx & f(x) = e^{2x} & p(2) = a + 2b = e^4 \\ p'(x) = b & f'(x) = 2e^{2x} & p'(2) = b = 2e^4 \end{array}$$

Így $a = -3e^4$, $b = 2e^4$, és

$$e^{2A} = -3e^4 I + 2e^4 A = e^4 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

3. Adjuk meg az alábbi A mátrix négyzetgyökét Hermite-interpoláció segítségével!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Megoldás: $k_A(x) = -(x-1)^2(x-4)$, $m_A(x) = (x-1)^2(x-4)$, $f(x) = \sqrt{x}$

$$\begin{aligned} p(x) &= a + bx + cx^2 & f(x) &= \sqrt{x} & p(1) &= a + b + c = 1 \\ p'(x) &= b + 2cx & f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} & p'(1) &= b + 2c = \frac{1}{2} \\ & & & & p(4) &= a + 4b + 16c = 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c = -\frac{1}{18}, \quad b = \frac{11}{18}, \quad a = \frac{4}{9} \Rightarrow p(x) = \frac{1}{18}(8 + 11x - x^2)$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \sqrt{A} = \frac{1}{18}(8I + 11A - A^2) = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/18 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Az $a, b \in \mathbb{C}$ milyen értékeire konvergens az A^k sorozat? Mikor tart a nullmátrixhoz?

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ a & b & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás: $k_A(x) = -x(x-a)^2 \Rightarrow \rho(A) = |a|$. Tehát $A^n \rightarrow O \Leftrightarrow |a| < 1$.

Ezen kívül A^n akkor lehet konvergens, ha $a = 1$, feltéve, hogy az a geometriai multiplicitása megegyezik az algebrai multiplicitásával, azaz 2-vel.

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & b & -1 \end{bmatrix}$$

rangja csak $b = 0$ esetén 1, tehát A^n konvergens \Leftrightarrow vagy $|a| < 1$, vagy $a = 1$ és $b = 0$.

5. Adjunk explicit képletet az $x_{n+3} = 5x_{n+2} - 8x_{n+1} + 4x_n$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 5$ rekurzív sorozat n . tagjára!

Megoldás: A rekurzió karakterisztikus polinomja $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x^2 - 4x + 4) = (x-1)(x-2)^2$, ezért a sorozat tagjai $x_n = a \cdot 1^n + (b+cn) \cdot 2^n$ alakban írhatók. A kezdeti feltételekből $a + b = 0$, $a + 2b + 2c = 1$ és $a + 4b + 8c = 5 \Rightarrow a = 1$, $b = -1$, $c = 1 \Rightarrow x_n = 1 + (n-1)2^n$.

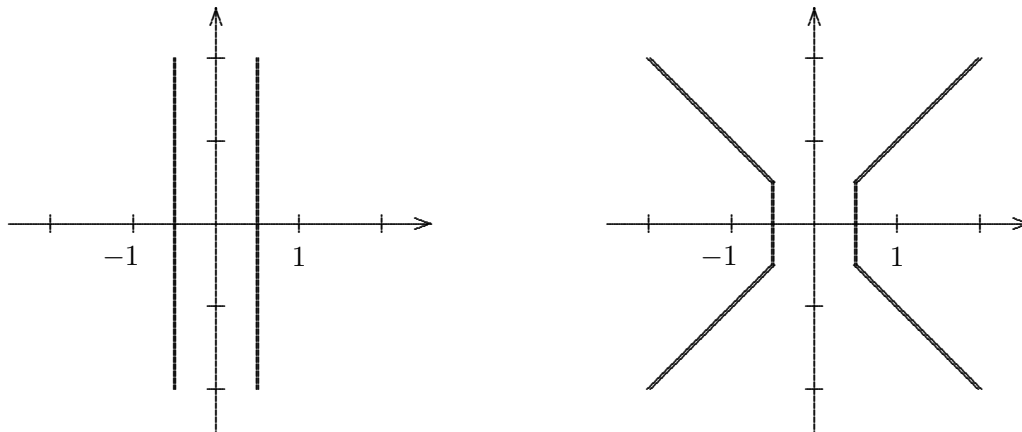
6. Ábrázoljuk a $\{P \mid |d(P, F_2) - d(P, F_1)| = 1\}$ "hiperbolát", ha $F_1 = (1, 0)$, $F_2 = (-1, 0)$, és d az 1-norma, illetve a ∞ -norma által indukált metrika \mathbb{R}^2 -en.

Megoldás: Elég a $d(P, F_2) - d(P, F_1) = 1$ egyenletet megoldani, a $d(P, F_2) - d(P, F_1) = -1$ megoldása ennek az y tengelyre vett tükröképe.

1-normában az alakzatot az $|x+1| + |y| - (|x-1| + |y|) = 1$, azaz $|x+1| - |x-1| = 1$ egyenlet írja le. $|x+1| > |x-1| \Rightarrow (x+1)^2 > (x-1)^2 \Rightarrow x > 0$, így $|x+1| = x+1$. Ha $x \geq 1$, akkor az $x+1 - (x-1) = 1$ egyenlet ellentmondásos, tehát $0 < x < 1$, és az egyenlet $(x+1) - (1-x) = 1$ alakú, aminek $x = \frac{1}{2}$ (és $y \in \mathbb{R}$ tetszőleges) a megoldása.

∞ -normában az egyenlet $\max\{|x+1|, |y|\} - \max\{|x-1|, |y|\} = 1$. A maximum nem lehet mindkét esetben az $|y|$, mert akkor 0 lenne a különbség. Ha mindkét esetben az x -es kifejezés a maximum, akkor az $|x+1| - |x-1| = 1$ ($|y| \leq |x-1|$) adja a megoldást, és az 1-normában kapott egyenlet alapján ez $x = \frac{1}{2}$, $|y| \leq \frac{1}{2}$. Végül, ha a két tag közül csak az egyikben nagyobb az $|y|$, akkor az kisebb a másik x -es tagjánál, tehát csak úgy lehet 1 a különbség, ha $|x+1| \geq |y| \geq |x-1|$, és $|x+1| - |y| = 1$. Ebből következik, hogy $|x+1| - |x-1| \geq 1$, tehát $x \geq \frac{1}{2}$ és $|y| = |x+1| - 1 = x$, azaz $y = \pm x$.

A két görbéhez a tükörképét is hozzátéve a következő alakzatokat kapjuk.



7. a) Bizonyítsuk be, hogy ha P egy pont a síkon, és e egy egyenes, akkor \mathbb{R}^2 minden normája szerint van e -nek P -hez legközelebbi pontja (ennek a P -től való távolsága az e egyenes távolsága P -től).
 b) Lássuk be, hogy a tengelyekkel párhuzamos egyenesektől való távolság minden p -normára megegyezik az euklideszi távolsággal
 c) Határozzuk meg a $P(1,1)$ pont távolságát az $e : y = 2x$ egyenestől az 1-, 2- és ∞ -norma szerint. Melyik az e egyenes P -hez legközelebbi pontja ezekre a normákra nézve?

Megoldás: a) Ha $\mathbf{v} = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$ az egyenes egyenlete, és \mathbf{c} a pont, akkor az $f(t) = \|\mathbf{a} + t\mathbf{b} - \mathbf{c}\|$ függvény folytonos, ugyanis

$$\begin{aligned} |f(t_2) - f(t_1)| &= \left| \|\mathbf{a} + t_2\mathbf{b} - \mathbf{c}\| - \|\mathbf{a} + t_1\mathbf{b} - \mathbf{c}\| \right| \leq \|(\mathbf{a} + t_2\mathbf{b} - \mathbf{c}) - (\mathbf{a} + t_1\mathbf{b} - \mathbf{c})\| = \\ &= \|(t_2 - t_1)\mathbf{b}\| = |t_2 - t_1| \cdot \|\mathbf{b}\|. \end{aligned}$$

Mivel a függvény alulról korlátos is, van minimuma.

- b) Legyen $e : y = a$ egy x tengellyel párhuzamos egyenes, és $P(x_0, y_0)$. Ekkor

$$d(P, e) = \min_x (|x_0 - x|^p + |y_0 - a|^p)^{1/p} \geq (|y_0 - a|^p)^{1/p} = |y_0 - a|,$$

és ezt $x = x_0$ -ra el is lehet érni. Ugyanígy igaz, hogy P -nek egy $e : x = a$ egyenestől vett távolsága $|x_0 - a|$.

- c) 1-normára:

$$f(x) = |x - 1| + |2x - 1| = \begin{cases} 1 - x + 1 - 2x = 2 - 3x, & \text{ha } x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - x + 2x - 1 = x, & \text{ha } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ x - 1 + 2x - 1 = 3x - 2, & \text{ha } 1 \leq x \end{cases}$$

Az első szakaszon $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, a másodikon $\frac{1}{2}$, a harmadikon $f(1) = 1$ a minimum, tehát $d(P, e) = \frac{1}{2}$, és az e P -hez legközelebbi pontja $(\frac{1}{2}, 1)$.

Euklideszi normában az egyenesre állított merőleges talppontja, azaz $y = 2x$ és $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ metszéspontja, azaz $(\frac{3}{5}, \frac{6}{5})$ a legközelebbi pont, és $d(P, e) = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

∞ -normában

$$\max \{ |x - 1|, |2x - 1| \} = \begin{cases} \max \{ 1 - x, 1 - 2x \} = 1 - 2x, & \text{ha } x \leq 0 \\ \max \{ 1 - x, 1 - 2x \} = 1 - x, & \text{ha } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \max \{ 1 - x, 2x - 1 \} = 1 - x, & \text{ha } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ \max \{ 1 - x, 2x - 1 \} = 2x - 1, & \text{ha } \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \\ \max \{ x - 1, 2x - 1 \} = 2x - 1, & \text{ha } 1 \leq x \end{cases}$$

A minimum az egyes szakaszokon $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1$, tehát $d(P, e) = \frac{1}{3}$, és a legközelebbi pont $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$.