

1. Bizonyítsuk be, hogy $U = \text{span}((1, 1, 0, 1), (0, -1, 2, 1))$ és $W = \text{span}((0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1))$ alterek direkt kiegészítői egymásnak! Írjuk fel az U -ra való W irányú vetítés standard mátrixát!
2. Tegyük fel, hogy f és g is vetítések a V vektortéren. Lássuk be, hogy $g \circ f$ általában nem vetítés (adjunk ellenpéldát!), de ha $\text{Im } f \leq \text{Im } g$ vagy $\text{Im } g \leq \text{Im } f$, akkor igen!
3. Döntsük el, hogy az alábbi mátrixok közül melyek hasonlók \mathbb{R} fölött? A hasonlókra adjunk is meg egy átkonjugáló mátrixot! Melyik mátrix mátrixa egy altérre való vetítésnek?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Határozzuk meg az alábbi lineáris transzformációk sajátértékeit és sajátvektorait!
 - a) Az $x + y + z = 0$ síkra való vetítés a z tengely irányában.
 - b) A $p(x) \mapsto (x - 1)p'(x)$ transzformáció a $K[x]_{\leq 2}$ vektortéren.
 - c) A transzponálás a 2×2 -es valós mátrixok terében.
5. Az alábbi valós mátrixok közül melyek diagonalizálhatók! Adjuk meg mindegyik mátrixnak a sajátértékeit és a sajátaltérük bázisát!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

6. Melyek igazak egy $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrixra?
 - a) Ha \mathbf{v} sajátvektora A -nak, akkor \mathbf{v} sajátvektora A^2 -nek is.
 - b) Ha \mathbf{v} sajátvektora A^2 -nek, akkor \mathbf{v} sajátvektora A -nak is.
 - c) Ha 0 sajátértéke A^2 -nek, akkor 0 sajátértéke A -nak is.
 - d) Ha $a^2 = b$ és b sajátértéke A^2 -nek, akkor a vagy $-a$ sajátértéke A -nak is.
7. Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait! Írjuk fel a hozzájuk tartozó lineáris transzformációk mátrixát a sajátvektorokból álló bázisban! Diagonalizálás segítségével számítsuk ki a B mátrix n -edik hatványát!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

8. Határozzuk meg az A^2 és az A mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait, azok algebrai és geometriai multiplicitását és a mátrixok karakterisztikus polinomját, ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Házi feladatok

Beadási határidő: február 28.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni. Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Legyen $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ az a mátrixleképezés, amelyre $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

mátrixszal.

- a) Keressünk olyan \mathcal{B}, \mathcal{C} bázispárt, hogy $[f]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = M = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ blokkmátrix, ahol I egységmátrix!
- b) Hasonló-e A az M mátrixhoz, azaz van-e egyetlen olyan \mathcal{B} bázis, amelyre $M = [f]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}}$?
2. Írjuk fel az origón átmenő, $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$ irányvektorú e egyenes mentén a $z = 0$ egyenletű S síkra vetítő leképezés, illetve az S sík mentén az e egyenesre való vetítés standard mátrixát! Mi a két leképezés kompozíciójának standard mátrixa?
3. Döntsük el, hogy az alábbi mátrixok között melyek hasonlóak \mathbb{R} fölött? A hasonlókra adjunk is meg egy átkonjugáló mátrixot!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Határozzuk meg a következő lineáris transzformációk sajátértékeit és sajátvektorait! (Nem kell felírni a transzformáció mátrixát. Használjuk a sajátvektor és sajátérték definícióját!)
- a) Az $(1, 2, -3)$ irányvektorú, origón átmenő egyenesre való tükrözés az \mathbb{R}^3 -ben.
- b) A két oszlop felcserélése a 2×2 -es valós mátrixok terében.
5. Az alábbi mátrixok közül melyek diagonalizálhatók \mathbb{R} fölött? Mindegyik mátrixra adjuk meg a sajátértékeket és azok algebrai és geometriai multiplicitását!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

6. Adjuk meg az $\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{bmatrix}$ komplex mátrix összes sajátértékét és sajátvektorát!
- 7*. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $n \times n$ -es A, B mátrixokra AB -nek és BA -nak ugyanazok a sajátértékei, és a nemnulla sajátértékeknek ugyanakkora a geometriai multiplicitása is, de a nullának nem feltétlenül.