1. Határozzuk meg a spektrumát annak az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak, amelynek minden eleme 1. Diagonalizálható-e ez a mátrix, és ha igen, mi a diagonális alakja?

2. Melyek diagonalizálhatók az alábbi mátrixok közül $\mathbb{R}$, illetve $\mathbb{C}$ fölött?

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Határozzuk meg az alábbi mátrix spektrálfelbontását és ennek segítségével a 12-edik hatványát!

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

4. Mutassuk meg a karakterisztikus egyenlet felírása nélkül, hogy az alábbi A mátrixnak van legalább két valós sajátértéke! (Használjuk a Gersgorin-köröket!)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

5. Adjuk meg az alábbi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ vektorok által kifeszített térnek egy ortonormált bázisát a standard skalárszorzatra nézve Gram-Schmidt-ortogonalizációval!

$$\mathbf{v}_1 = (0,1,0,-1),\ \mathbf{v}_2 = (1,-1,0,1),\ \mathbf{v}_3 = (1,3,1,-1)$$

6. Tekintsük az $(1,1,0,1),(1,1,0,0)$ által kifeszített W alteret $V = \mathbb{Z}_2^4$ vektortérben.
  a) Mutassuk meg, hogy $W^\perp$ nem direkt kiegészítője W-nek.
  b) Válasszunk ki a $\mathbb{Z}_2^4$ standard $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ bázisából két elemet, amelyek W-nek valamelyik direkt kiegészítőjét feszítik ki!

7. Tekintsük az $\mathbb{R}^2$-et mint euklideszi teret az $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ mátrix által megadott $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_A := \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ skalárszorzattal. Legyen $\mathbf{u} = (1,1)$, $\mathbf{v} = (1,-1)$.
  a) Mi lesz az $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle_A$ és $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_A$, skalárszorzatok értéke, és mi az $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$ hossza ebben az euklideszi térben?
  b) Adjunk meg erre a skalárszorzatra nézve ortonormált bázist $\mathbb{R}^2$-ben!

Házi feladatok

Beadási határidő: március 7.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni. Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Az alábbi mátrix két elemét nem ismerjük, de tudjuk, hogy egyik sajátértéke 3. Mi a másik két sajátértéke?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ * & * & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Adjunk meg olyan 2×2-es A mátrixot, amelyre $A^4 = A^2 \neq A$, és A-nak egyetlen eleme sem 0. (Útmutatás: keressünk a $D^4 = D^2 \neq D$ tulajdonságot kielégítő diagonális D mátrixot, és konjugáljuk el alkalmas P-vel.)

3. Határozzuk meg az alábbi mátrix spektrálfelbontását, és ennek segítségével számítsuk ki a mátrix 10-edik hatványát!

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Az alábbi A mátrixnak mátrixnak van tiszta képzetes sajátértéke. Adjunk ennek abszolút értékére becslést a Gersgorin-körök segítségével!

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1-i \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & i \end{bmatrix}$$

5. Adjuk meg az alábbi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ vektorok által kifeszített térnek egy ortonormált bázisát a standard skalárszorzatra nézve Gram-Schmidt-ortogonalizációval!

$$\mathbf{v}_1 = (1,1,1,1),\ \mathbf{v}_2 = (1,2,1,2),\ \mathbf{v}_3 = (1,2,3,6).$$

Számítsuk ki a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ vektorok koordinátavektorait erre az ortonormált bázisra nézve!

6. Igazoljuk, hogy $\mathbf{a}_1 = (1,0,0,0)$, $\mathbf{a}_2 = (0,0,1,1))$, $\mathbf{a}_3 = (0,0,1,-1)$, $\mathbf{a}_4 = (0,-1,0,0)$ vektorok ortogonális bázist alkotnak az $\mathbb{R}^4$ standard euklideszi térben. Legyen $W := \operatorname{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3)$. Számítsuk ki az $\mathbf{x} = (1,3,0,2)$ vektor W-re való merőleges vetületét, és bontsuk az $\mathbf{x}$ vektort egy W-beli és egy $W^\perp$-beli komponenens összegére!

7*. Legyen $K = \mathbb{Z}_p$, ahol p páratlan prím, és tekintsük a K^n vektorteret a standard $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ skalárszorzattal. Egy $\mathbf{v}$ vektort izotrópnak hívunk, ha $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$, azaz $\mathbf{v}$ „merőleges” önmagára. Bizonyítsuk be, hogy egy $U \leq K^n$ altérre akkor és csak akkor igaz, hogy $K^n = U \oplus U^\perp$, ha U-nak van nem izotróp vektorokból álló ortogonális bázisa. (Útmutatás: lássuk be először, hogy ha egy altér minden eleme izotróp, akkor az altér merőleges önmagára. $p = 2$-re ez nem igaz!)