1. Számítsuk ki az $\mathbf{a} = (1, i, 1+i)$ és $\mathbf{b} = (1-i, i, 1+i)$ vektorok skaláris szorzatát és távolságát!

2. Ortogonalizáljuk a $\mathbb{C}^3$-beli $\{(i, 0, 1),\ (1, i, 1+i)\}$ vektorrendszert, és egészítsük ki $\mathbb{C}^3$ ortogonális bázisává! Tegyük ortonormálttá ezt a bázist!

3. Legyen $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{x} + i\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ vektor pontosan akkor merőleges a konjugáltjára, ha $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ a valós euklideszi térben azonos hosszúságú, egymásra merőleges vektorok!

4. Döntsük el az alábbi mátrixok mindegyikéről, hogy önadjungált, ferdén önadjungált, unitér, illetve normális-e?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Házi feladatok

Beadási határidő: március 22.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni. Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Legyen $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, és $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $X \mapsto XM$.

a) Írjuk fel f mátrixát a standard $\{ E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22} \}$ bázisban.

b) Adjuk meg $\operatorname{Ker} f$ és $\operatorname{Im} f$ bázisát (a báziselemeket 2×2-es mátrixként felírva).

2. Az alábbi két mátrix közül melyik diagonalizálható? Amelyik igen, annak számítsuk ki az n. hatványát!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Számítsuk ki az alábbi két vektor skaláris szorzatát és távolságát!

a) $(1+i, i, -1)$, $(1+i, -i, -1)$

b) $(1-i, i, -2, 1+i)$, $(1+i, 0, 2, 1-i)$.

4. Végezzünk Gram-Schmidt-ortogonalizálást a $\mathbb{C}^3$-beli $(i, 1, i)$, $(i, 1, 0)$, $(i, 0, 0)$ vektorokon! Adjuk meg a kapott ortogonális bázishoz tartozó ortonormált bázist is!

5. Bizonyítsuk be, hogy valós euklideszi terekben igaz a Pitagorasz-tétel megfordítása, azaz, hogy $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2$ esetén $\mathbf{u}$ merőleges $\mathbf{v}$-re, de komplex euklideszi terekben nem! Adjunk ellenpéldát!

6. Milyen feltételek mellett unitér, öndajungált, illetve normális az

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & bi & 0 \\ 0 & a & 0 & ci \\ ci & 0 & a & 0 \\ 0 & bi & 0 & a \end{bmatrix} \quad \text{mátrix, ahol } a, b, c \in \mathbb{R}?$$

7*. Definiáljuk $\mathbb{Z}_2^n$-en egy vektor hosszát a benne szereplő 1-ek számaként. Bizonyítsuk be, hogy ez a hosszúság is kielégíti a háromszög-egyenlőtlenséget, azaz $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$. Mi a feltétele az egyenlőségnek, és hány olyan vektorpár ($(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{Z}_2^n \times \mathbb{Z}_2^n$ rendezett pár) van, amelyekre a háromszög-egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül?