

1. Adjuk meg az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix Schur-felbontását!

2. Az $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ mátrix önadjungált és unitér (így persze normális is). Keressünk egy olyan B mátrixot, amely hasonló A -hoz, és még csak nem is normális!
3. a) Mutassuk meg, hogy a következő mátrixok ortogonálisan hasonlóak.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Határozzuk meg a hasonlóság ortogonális mátrixát!

4. Bizonyítsuk be, hogy egy $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix pontosan akkor ferdén önadjungált, ha iA önadjungált.
5. Bizonyítsuk be, hogy normális mátrix különböző sajátértékeihez tartozó sajátalterei merőlegesek egymásra, pontosabban
- a) $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ pontosan akkor normális, ha \mathbb{C}^n az A sajátaltéréinek ortogonális direkt összege (azaz a komponensek páronként merőlegesek egymásra);
- b) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pontosan akkor szimmetrikus, ha \mathbb{R}^n az A sajátaltéréinek ortogonális direkt összege
6. Az alábbiak közül melyik mátrix hozható valós vagy komplex diagonális alakra? Lehet-e a diagonalizáló mátrix unitér/ortogonális?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{bmatrix}$$

Házi feladatok

Beadási határidő: március 29.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni. Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

- Adjuk meg az $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix Schur-felbontását!
- a) Mutassuk meg, hogy a következő mátrixok ortogonálisan hasonlóak:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Határozzuk meg a hasonlóság ortogonális mátrixát!

- Bizonyítsuk be, hogy normális mátrixnak (komplex) skalárszorosa, hatványa, és inverze (ha van) normális, de normális mátrixok szorzata lehet nem normális (adjunk ellenpéldát)!
- $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ szimmetrikus mátrix, $k_A(x) = -(x-1)(x-2)^2$, és $(1, 1, 0)$ az A -nak a $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektora. Adjunk meg \mathbb{R} -ben az A sajátvektoraiból álló ortonormált bázist, és ennek segítségével határozzuk meg az A mátrixot. (Felhasználhatjuk az 5. gyakorló feladat állítását.)
- Tegyük fel, hogy az $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix normális, az A mátrixot pedig úgy kaptuk N -ből, hogy az i . sorát, majd az i . oszlopát megszoroztuk -1 -gyel (tehát az ii indexű eleme nem változott). Bizonyítsuk be, hogy A is normális! (Útmutatás: hogyan kaphatjuk meg N -et A -ból mátrixszorzással?)
- Az alábbiak közül melyik mátrix hozható valós, illetve komplex diagonális alakra? Lehet-e a diagonalizáló mátrix unitér/ortogonális?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- * Legyen $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ egy önadjungált mátrix. Bizonyítsuk be, hogy az A, A^2, A^3, \dots mátrixok vagy mind különbözőek, vagy legfeljebb két különböző van köztük!