1. Határozzuk meg az $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ mátrix pozitív (szemi)definit négyzetgyökét, és a Cholesky-felbontását, ha van.

2. Tekintsük a $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T B \mathbf{y}$ valós bilineáris függvényt, ahol $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

a) Határozzuk meg, a hozzá tartozó kvadratikus alak mátrixát és jellegét!

b) Adjunk meg $\mathbb{R}^2$-ben olyan bázist, amelyben a kvardatikus alak négyzetösszeg, és írjuk fel ebben a bázisban a kvadratikus alakot!

3. Határozzuk meg a $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ valós bilineáris függvényre nézve a $W = \operatorname{span}((1, 1, 0), (0, 2, 1))$ altér jobb és bal oldali merőlegesét, ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Legyen egy φ komplex skalárszorzat (azaz pozitív definit hermitikus bilin. fv.) Gram-mátrixa az $\mathcal{E} = \{ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \}$ standard bázisban $\begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$.

a) Számítsuk ki $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ hosszát és skaláris szorzatát a $(\mathbb{C}^2, \varphi)$ euklideszi térben.

b) Adjunk meg egy φ-ortonormált bázist $\mathbb{C}^2$-ben!

c) Adjuk meg φ Gram-mátrixát abban a $\mathcal{B}$ bázisban, amelynek elemei $\mathbf{b}_1 = (1, i)$ és $\mathbf{b}_2 = (1, -1)$.

5. Legyen $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^* A \mathbf{y}$ az alábbi A mátrixszal.

a) Számítsuk ki a $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ értékét $\mathbf{x} = (1, i, 0)$, $\mathbf{y} = (2 - i, 1, 1)$-re.

b) Adjuk meg a φ által definiált kvadratikus alakot.

c) Diagonalizáljuk az A mátrixot mint Gram-mátrixot, és adjunk φ-ortogonális bázist $\mathbb{C}^3$-ben. Mi a kvadratikus alak jellege?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 2 & 1 \\ 1-i & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

6. Bizonyítsuk be, hogy minden indefinit hermitikus bilineáris függvényre nézve van olyan nem nulla vektor, amely merőleges önmagára!

7. Tekintsük $\mathbb{R}^2$-en a $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \det[\mathbf{u} \mid \mathbf{v}]$ bilineáris függvényt. Írjuk fel φ Gram-mátrixát a standard bázisban! Van-e $\mathbb{R}^2$-nek φ-ortogonális bázisa?

Házi feladatok

Beadási határidő: április 11.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni. Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Adjuk meg az alábbi mátrix Cholesky-felbontását!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

2. Határozzuk meg $\mathbb{R}^3$-ben az $(1,-1,1)$ vektor által generált altér bal, illetve jobb oldali merőlegesét a $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{y}$ bilineáris függvényre nézve, ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

3. Tekintsük az $\mathbb{R}^2$-et az $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix által megadott $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_A := \mathbf{x}^T A\mathbf{y}$ bilineáris függvénnyel. Lássuk be, hogy $\langle\ ,\ \rangle_A$ euklideszi skalárszorzat, és Gram–Schmidt-ortogonalizációval adjunk meg $\mathbb{R}^2$-nek egy ortonormált bázisát erre a skalárszorzatra nézve!

4. Egy $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$-en értelmezett komplex bilineáris függvény $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = i\bar{x}_1 y_2 - i\bar{x}_2 y_1$.
a) Írjuk fel φ Gram-mátrixát a standard bázisban!
b) Lássuk be, hogy φ hermitikus!
c) Határozzuk meg a jellegét!

5. Adjunk meg egy olyan bázist, amelyben az előző feladatbeli φ mátrixa diagonális! Írjuk fel a kvadratikus alakot ebben a bázisban!

6. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, és tekintsük a

$$\varphi(p,q) = p(a)q(b) + q(a)p(b)$$

bilineáris függvényt a legfeljebb elsőfokú valós polinomok terén. Írjuk fel a φ mátrixát a standard $\{1, x\}$ bázisban! Az a és b értékétől függően mi a jellege a φ-hez tartozó kvadratikus alaknak?

7*. Melyek azok a $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ valós szimmetrikus bilineáris függvények, amelyekre bármely $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ vektor eleme egy φ-ortogonális bázisnak?