1. Számítsuk ki az $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix redukált és teljes SVD-felbontását!

2. Legyen $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ normális mátrix, $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ szinguláris értékekkel. Lássuk be, hogy $B = A + cI$ is normális tetszőleges $c \in \mathbb{C}$-re, és a legnagyobb szinguláris értéke legföljebb $\sigma_1 + |c|$.

3. Lássuk be, hogy az alábbi A mátrix normális! Határozzuk meg az SVD-felbontását!

$$\begin{bmatrix} 1+2i & -i \\ i & 1+2i \end{bmatrix}$$

4. Határozzuk meg az alábbi mátrixok redukált SVD-felbontását!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Írjuk fel a 4. feladatbeli B és C mátrixok teljes SVD-felbontását és a C mátrix SVD-felbontásának diadikus alakját!

6. Számítsuk ki a 4. feladatbeli B és C mátrixok pszeudoinverzét az SVD-felbontás segítségével!

7. Számítsuk ki a 4. feladatbeli négyzetes mátrixok polárfelbontását! Melyiknek van többféle is?

8. Legyen $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Adjuk meg A SVD-felbontását, és legjobb 1 rangú közelítését!
b) Az a) rész eredményét felhasználva adjuk meg A inverzének is az SVD-felbontását és legjobb 1 rangú közelítését!
c) Mennyi a fenti közelítések hibája Frobenius-normában?

Házi feladatok

Beadási határidő: április 25.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni. Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Legyen φ valós szimmetrikus bilineáris függvény, és q a hozzá tartozó kvadratikus alak. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges két $\mathcal{B}$ és $\mathcal{C}$ φ-ortogonális bázisra

$$\operatorname{span}\{\, \mathbf{b}_i \in \mathcal{B} \mid q(\mathbf{b}_i) = 0 \,\} = \operatorname{span}\{\, \mathbf{c}_j \in \mathcal{C} \mid q(\mathbf{c}_j) = 0 \,\}.$$

(Útmutatás: Lássuk be, hogy mindkét altér $V_\varphi^\perp$-vel egyenlő!)

2. Állítsuk elő az alábbi A mátrix redukált és teljes SVD-felbontását!

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

3. Az $A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix SVD-felbontása

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Adjuk meg A^{-1} SVD-felbontását! (Figyeljünk a szinguláris értékek sorrendjére!)

4. Írjuk fel az $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix redukált SVD-felbontását, és számítsuk ki ebből a pszeudoinverzét!

5. Határozzuk meg a $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ mátrix SVD-felbontását, és adjuk meg ennek segítségével a polárfelbontását!

6. Határozzuk meg az 5. feladat B mátrixának és B^{-1}-nek is a legjobb 1 rangú közelítését!

7*. Mutassuk meg, hogy minden $M \in \mathbb{C}^{m \times n}$ mátrixra

$$\min_{|\mathbf{x}|=1} |M\mathbf{x}|$$

vagy 0, vagy (teljes oszloprangú mátrixra) a legkisebb szinguláris érték, és a minimumát az ehhez tartozó jobb szinguláris vektorokon veszi fel! (Használjuk az M mátrix SVD-felbontását!)