

1. Írjuk fel az alábbi mátrix karakterisztikus polinomját és minimálpolinomját!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Van-e az egységmátrixon kívül olyan mátrix $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ -ben, illetve $\mathbb{Q}^{2 \times 2}$ -ben, amelyek az ötödik hatványa az egységmátrix?
3. Lássuk be, hogy a 2×2 -es mátrixok között pontosan azok hasonlók, amelyeknek megegyezik a minimálpolinomjuk, de 3×3 -as mátrixokra ez már nem igaz.
4. Legyen $f : V \rightarrow V$ lineáris transzformáció, és $U \leq V$ 1-dimenziós altér. Bizonyítsuk be, hogy U akkor és csak akkor f -invariáns, ha része az f egy sajátalterének.
5. Van-e az A mátrixnak 1-dimenziós, illetve 2-dimenziós invariáns altere \mathbb{R}^4 -ben?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Bizonyítsuk be, hogy egy $A = \text{diag}(B_1, \dots, B_k)$ blokkdiagonális mátrix karakterisztikus polinomja a B_i mátrixok karakterisztikus polinomjának szorzata, minimálpolinomja pedig a B_i mátrixok minimálpolinomjának legkisebb közös többszöröse.
7. Mi lehet a Jordan-féle normálalakja annak a komplex mátrixnak, amelynek a
- karakterisztikus polinomja $(x - 1)^6$, minimálpolinomja $(x - 1)^4$, az 1-hez tartozó V_1 sajátaltér dimenziója 2;
 - karakterisztikus polinomja $-(x - \lambda)^7$, minimálpolinomja $(x - \lambda)^3$, $\dim(V_\lambda) = 3$, ahol V_λ a λ sajátértékhez tartozó sajátaltér?
8. Mi az alábbi mátrixok Jordan-féle normálalakja?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

9. Hasonlóság erejéig hány olyan komplex mátrix van, melynek
- karakterisztikus polinomja $-(x - 1)^3(x - 3)^4$;
 - minimálpolinomja $(x + 2)^6$, és sajátaltere 2-dimenziós?

Házi feladatok

Beadási határidő: május 2.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni. Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Írjuk fel az alábbi mátrix karakterisztikus polinomját és minimálpolinomját!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. A Cayley–Hamilton-tétel bizonyításában felírtuk egy A mátrixra az $\text{adj}(A - xI)$ mátrixot mint mátrixegytűthetős polinomot. Számítsuk ki ezt a polinomot (írjuk is fel mindegyik mátrixegytűthetőt) az alábbi A mátrixra.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi valós A mátrixnak nincs 1-dimenziós invariáns altere, viszont $\text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ és $\text{span}((-1, 0, -1, 1), (0, 1, 2, -1))$ invariáns alterek. Hozzuk ennek alapján az A mátrixot 2×2 -es blokkdiagonális alakra!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

4. Mi az alábbi mátrixok Jordan-féle normálalakja, és mi a minimálpolinomjuk?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

5. Mi lehet a Jordan-féle normálalakja annak a komplex mátrixnak, melynek
 a) karakterisztikus polinomja $-(x-2)^7$, minimálpolinomja $(x-2)^4$, a 2-höz tartozó V_2 sajátaltér dimenziója 2;
 b) karakterisztikus polinomja $(x-\lambda)^8$, minimálpolinomja $(x-\lambda)^4$, $\dim(V_\lambda) = 3$, ahol V_λ a λ sajátértékhez tartozó sajátaltér?
6. Hasonlóság erejéig hány olyan komplex mátrix van, melynek
 a) karakterisztikus polinomja $-(x-2)^5(x+3)^2$;
 b) minimálpolinomja $(x-1)^5$, és sajátaltere 3-dimenziós?
- 7*. Bizonyítsuk be, hogy minden \mathbb{Z}_2 fölötti 2×2 -es mátrix nyolcadik hatványa megegyezik a négyzetével.