1. Bizonyítsuk be, hogy ha $A, B \in K^{n\times n}$-re $AB = BA$, akkor A minden sajátaltere B-invariáns.

2. Mutassuk meg, hogy ha két 3×3-as vagy 2×2-es komplex mátrix karakterisztikus polinomja és minimálpolinomja megegyezik, akkor a két mátrix hasonló.

3. Hasonlóság erejéig hány olyan 3×3-as komplex mátrix van, amelynek a négyzete megegyezik a köbével?

4. Mi lehet az A^2 mátrix minimálpolinomja, ha $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ minimálpolinomja $(x+1)^2$?

5. Legyen A 10×10-es valós mátrix! Jelölje r_i az A^i rangját! Lehet-e az $(r_1, r_2, \ldots)$ sorozat egyenlő az alábbiakkal?
a) $(5, 6, \ldots)$;
b) $(9, 8, 7, \ldots, 4, 4, \ldots)$;

6. Egy 10×10-es A mátrix sajátértékei $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ Az $A - \lambda_1 I$ hatványainak rangja rendre $8, 6, 5, 4, 4$. Az $A - \lambda_2 I$ hatványainak rangja rendre $7, 6, 6$. Írjuk fel A Jordan-féle normálalakját!

7. Bizonyítsuk be, hogy ha $K \leq L$ végtelen testek, és $A, B \in K^{n\times n}$ hasonlók mint L fölötti mátrixok, akkor $K^{n\times n}$-ben is hasonlók!

8. Bizonyítsuk be, hogy minden négyzetes mátrix hasonló a transzponáltjához!

9. Határozzuk meg az alábbi mátrixok Jordan-féle normálalakját, és adjuk meg egy Jordan-bázisát!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Házi feladatok

Beadási határidő: május 9.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni. Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Bizonyítsuk be, hogy ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, és $U \leq \mathbb{R}^n$ az A-nak invariáns altere, akkor $U^\perp$ az A^T-nak invariáns altere.

2. Hasonlóság erejéig hány olyan 3×3-as komplex mátrix van, amelynek a négyzete megegyezik a negyedik hatványával?

3. Legyen A egy 5×5-ös, 2 sajátértékű, B pedig egy 5×5-ös, 0 sajátértékű Jordan-blokk. Mi az A^2 és a B^2 mátrix Jordan-normálalakja?

4. Legyen A 10×10-es valós mátrix! Jelölje r_i az A^i rangját! Lehet-e az $(r_1, r_2, \ldots)$ sorozat egyenlő az alábbiakkal?

a) $(10, 9, 8, \ldots)$;

b) $(8, 5, \ldots)$.

5. Egy 10×10-es A mátrix sajátértékei $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 5$. Az $A - \lambda_1 I$ hatványainak rangja rendre $8, 7, 6, 6$. Az $A - \lambda_2 I$ hatványainak rangja rendre $7, 5, 4, 4$. Írjuk fel A Jordan-féle normálalakját!

6. Határozzuk meg az alábbi mátrix Jordan-féle normálalakját, és adjuk meg egy Jordan-bázisát!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

7*. Legyen $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, és tegyük fel, hogy a $C = AB - BA$ mátrix rangja 1. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $C^2 = 0$. (Útmutatás: Mit mondhatunk C nyomáról?)