

1. Határozzuk meg az alábbi  $A$  mátrix Jordan-normálalakját és Jordan-bázisát, majd ennek a segítségével számítsuk ki az  $A^n$  hatványokat!

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Hermite-interpolációval számítsuk ki az  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$  mátrixra az  $e^{2A}$  értékét!
3. Adjuk meg az alábbi  $A$  mátrix négyzetgyökét Hermite-interpoláció segítségével!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

4. Az  $a, b \in \mathbb{C}$  milyen értékeire konvergens az  $A^k$  sorozat? Mikor tart a nullmátrixhoz?

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ a & b & 0 \end{bmatrix}$$

5. Adjunk explicit képletet az  $x_{n+3} = 5x_{n+2} - 8x_{n+1} + 4x_n$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 5$  rekurzív sorozat  $n$ . tagjára!
6. Ábrázoljuk a  $\left\{ P \mid |d(P, F_2) - d(P, F_1)| = 1 \right\}$  "hiperbolát", ha  $F_1 = (1, 0)$ ,  $F_2 = (-1, 0)$ , és  $d$  az 1-norma, illetve a  $\infty$ -norma által indukált metrika  $\mathbb{R}^2$ -en.
7. a) Bizonyítsuk be, hogy ha  $P$  egy pont a síkon, és  $e$  egy egyenes, akkor  $\mathbb{R}^2$  minden normája szerint van  $e$ -nek  $P$ -hez legközelebbi pontja (ennek a  $P$ -től való távolsága az  $e$  egyenes távolsága  $P$ -től).  
 b) Lássuk be, hogy a tengelyekkel párhuzamos egyenesektől való távolság minden  $p$ -normára megegyezik az euklideszi távolsággal  
 c) Határozzuk meg a  $P(1, 1)$  pont távolságát az  $e : y = 2x$  egyenestől az 1-, 2- és  $\infty$ -norma szerint. Melyik az  $e$  egyenes  $P$ -hez legközelebbi pontja ezekre a normákra nézve?

## Házi feladatok

Beadási határidő: május 16.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni. Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Határozzuk az alábbi  $A$  mátrix Jordan-normálalakját,  $J$ -t, és írjuk fel az  $e^J$  és  $\sqrt{J}$  mátrixokat!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Keressük meg azt a  $p(x)$  Hermite-féle interpolációs polinomot, melyre  $e^B = p(B)$  a következő mátrixra, és számítsuk ki ebből az  $e^B$  értékét!

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Állapítsuk meg az alábbi mátrixokról, hogy a hatványaik konvergensek-e, és ha igen, a nullmátrixhoz tartanak-e.

$$A = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} \quad B = \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/6 \end{bmatrix}$$

4. Adjunk explicit képletet az  $x_{n+3} = 6x_{n+2} - 12x_{n+1} + 8x_n$ ,  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = x_2 = 4$  rekurzív sorozat  $n$ . tagjára!
5. Ábrázoljuk  $\mathbb{R}^2$ -ben a  $(0, 1)$  fókuszú és  $y = -1$  vezéregyenesű "parabolát" az összeg-, illetve a maximummetrikára nézve (azaz adjuk meg azoknak a pontoknak a mértani helyét, amelyek az adott metrika szerint egyenlő távolságra vannak a fókuszponttól és a vezéregyenesestől)!
6. Adjunk meg  $\mathbb{R}^n$ -ben
- $2n$  pontot, amelyek az összegmetrikára és
  - $2^n$  pontot, amelyek a maximummetrikára nézve páronként egyenlő távolságra vannak egymástól.
- 7\*. Bizonyítsuk be, hogy a maximummetrikára nézve  $\mathbb{R}^n$ -ben legföljebb  $2^n$  olyan pont van, amelyeknek a páronkénti távolsága egyenlő!