1. Tekintsük az $\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n + \mathbf{b}$ rekurzív vektorsorozatot, ahol $\mathbf{x}_n, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^d$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Bizonyítsuk be, hogy ez akkor és csak akkor konvergens minden $\mathbf{b}$ és $\mathbf{x}_0$ értékre, ha $\rho(A) < 1$, továbbá, hogy konvergencia esetén $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = (I - A)^{-1}\mathbf{b}$, függetlenül az $\mathbf{x}_0$ értékétől!

2. Legyen $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ az origó körüli $+45°$-os forgatás, B pedig az x tengely irányú kétszeres nyújtás standard mátrixa. Határozzuk meg a két mátrix 1-, 2- és ∞-normáját geometriai és algebrai módszerrel is!

3. Határozzuk meg az alábbi mátrixok Frobenius-normáját, 1-, 2- és ∞-normáját és spektrálsugarát!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Mutassuk meg, hogy egy $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix spektrálsugara legföljebb akkora, mint bármely indukált mátrixnorma szerinti normája, képlettel:

$$\rho(A) \le \|A\|,$$

speciálisan legföljebb akkora, mint a 2-normája!

5. Mutassuk meg, hogy ha A normális mátrix, akkor a 2-normája egyenlő a spektrálsugarával!

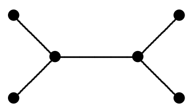
6. Adjuk meg az $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix legjobb 1 rangú közelítését a Frobenius-, 2-, 1- és ∞-norma szerint! (Az első kettőnél használjuk az Eckart–Young-tételt!.)

7. Bizonyítsuk be, hogy egy d-reguláris egyszerű irányítatlan gráf szomszédsági mátrixának spektrálsugara és 1-, 2 és ∞-normája is d.

8. Mi a spektruma az alábbi gráfoknak? Az a) és b) feladatbeli gráfra keressük meg a sajátvektorokat is!

a) 3, illetve 4 szögpontú teljes gráf

b) 4 hosszú kör

c) 

Házi feladat pótlása

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni. Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Írjuk fel az $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ lineáris transzformáció, illetve a $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{y}$ bilineáris függvény mátrixát a $\mathcal{B} = \{(0,1,0), (0,0,1), (1,-1,2)\}$ bázisban, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi A mátrix diagonalizálható, és írjuk fel az A^n mátrixhatványt!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Határozzuk meg az alábbi önadjungált mátrixok jellegét (definitségét), és az egyikhez (mindegy, melyikhez) adjunk olyan bázist, amelyben a hozzá tartozó kvadratikus alak mátrixa diagonális!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

4. Adjuk meg az A mátrix Jordan-féle normálalakját, ha

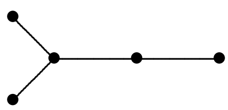
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Írjuk fel az e^{-J} mátrixot is, ahol J az A Jordan-normálalakja.

5. Tekintsük az alábbi mátrixokat:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Határozzuk meg a Frobenius-, 1-, 2- és ∞-normájukat és a spektrálsugarukat!

6. Határozzuk meg a  gráf spektrumát!