1. *Határozzuk meg a spektrumát annak az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixnak, amelynek minden eleme 1. Diagonalizálható-e ez a mátrix, és ha igen, mi a diagonális alakja?*

Megoldás: $n = 1$-re a spektrum $\{1\}$.
Tegyük fel, hogy $n \geq 2$. Mivel $r(A) = 1 < n$, a 0 szükségképpen sajátérték, és $\dim V_0 = n-1$. A geometriai multiplicitás nem lehet nagyobb az algebrainál, így a 0 algebrai multiplicitása is legalább $n-1$, ezért ezen kívül már csak egy sajátérték lehet, legyen ez λ. A mátrix nyoma $n = 0 + \ldots + 0 + \lambda = \lambda$, tehát a spektrum az algebrai multiplicitásokkal $\{0, \ldots, 0, n\}$ (a 0-t n-szer véve).
Ebből az is következik, hogy az algebrai multiplicitások megegyeznek a geometriaiakkal, ezért A diagonalizálható, és a diagonális alakja $\operatorname{diag}(0, 0, \ldots, 0, n)$.

2. *Melyek diagonalizálhatók az alábbi mátrixok közül $\mathbb{R}$, illetve $\mathbb{C}$ fölött?*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás: $k_A(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x = -x(x-1)(x-2)$, vagyis a 3×3-as mátrixnak három különböző valós gyöke van, így diagonalizálható $\mathbb{R}$ fölött is.
$k_B(x) = (x-1)^2$, de $r(B - I) = 1$ miatt $\dim V_1 = 2 - 1 = 1$ kisebb az 1 algebrai multiplicitásánál, így B sem $\mathbb{R}$, sem $\mathbb{C}$ fölött nem diagonalizálható.
$k_C(x) = -x^3 - x = -x(x^2+1)$ nem bontható $\mathbb{R}$ fölött lineáris faktorokra, ezért C az $\mathbb{R}$ fölött nem diagonalizálható. Viszont $\mathbb{C}$ fölött $k_C(x) = -x(x-i)(x+i)$ mutatja, hogy C-nek $\mathbb{C}$-ben három különböző sajátértéke van, ezért $\mathbb{C}$ fölött diagonalizálható.

3. *Határozzuk meg az alábbi mátrix spektrálfelbontását és ennek segítségével a 12-edik hatványát!*

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Megoldás: A spektrálfelbontást kiszámíthatjuk az $A = PDP^{-1}$ felbontás sajátértékek szerint csoportosított összegre bontásából, de a sajátvektorok megkeresése és P invertálása helyett a spektrálfelbontás vetítőmátrixait meghatározhatjuk az alábbi egyenletrendszerből is:

$$\begin{array}{ccccccc} P_1 & + & \ldots & + & P_k & = & I \\ \lambda_1 P_1 & + & \ldots & + & \lambda_k P_k & = & A \\ \ldots & & & & & & \\ \lambda_1^{k-1} P_1 & + & \ldots & + & \lambda_k^{k-1} P_k & = & A^{k-1} \end{array}$$

ahol $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ a diagonalizálható A mátrix sajátértékei. Esetünkben
$|A - xI| = -(x+1)^2(x-2)$, és $r(M+I) = 1$ miatt $\dim V_{-1} = 2$, így M diagonalizálható, tehát használhatjuk a módszert.
A P_1, P_2-re felírt egyenletrendszer

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & I \\ -1 & 2 & A \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & I \\ 0 & 3 & A+I \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3}I - \frac{1}{3}A \\ 0 & 1 & \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}I \end{array}\right] \quad \Rightarrow$$

$$P_1 = \frac{1}{3}(2I - A) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \frac{1}{3}(A+I) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Tehát

$$A = (-1) \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

a spektrálfelbontás, és

$$A^{12} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} + 4096 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4096 & 4095 & -4095 \\ 4095 & 4096 & -4095 \\ 4095 & 4095 & -4094 \end{bmatrix}$$

4. *Mutassuk meg a karakterisztikus egyenlet felírása nélkül, hogy az alábbi A mátrixnak van legalább két valós sajátértéke! (Használjuk a Gersgorin-köröket!)*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Az oszlopokhoz tartozó Gersgorin-körök:

$$G_1 : \ |z-2| \leq 1, \quad G_2 : \ |z-9| \leq 1, \quad G_3 : \ |z-2| \leq 5, \quad G_4 : \ |z-6| \leq 1.$$

Itt $G_1 \cup G_3 \cup G_4 = G_3$ diszjunkt G_2-től, ezért a négy sajátértékből (multiplicitással számolva) az első hármat, a második egyet tartalmaz. Viszont valós együtthatós polinom (ilyen a valós mátrix karakterisztikus polinomja is) nemvalós gyökei konjugált párokat alkotnak, tehát az x tengelyre szimmetrikusan helyezkednek el, ahogy a G_1, G_2, G_3, G_4 Gersgorin-körök is. Így a G_3-ba eső három sajátértékből legföljebb egy pár lehet az x tengelyen kívül, a G_2-ben levő pedig szükségképpen az x tengelyen van. Tehát A-nak van legalább két különböző valós sajátértéke. (Valójában pontosan kettő van.)

5. *Adjuk meg az alábbi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ vektorok által kifeszített térnek egy ortonormált bázisát a standard skalárszorzatra nézve Gram-Schmidt-ortogonalizációval!*

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0, -1), \ \mathbf{v}_2 = (1, -1, 0, 1), \ \mathbf{v}_3 = (1, 3, 1, -1)$$

Megoldás: Először csak ortogonalizálunk, aztán normálunk. Egy-egy ortogonalizálás után az új vektort helyettesíthetjük a skalárszorosával, ha az szebb.
$\mathbf{c}_1 = \mathbf{v}_1 = (0, 1, 0, -1)$,
$\mathbf{c}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{c}_1, \mathbf{v}_2 \rangle}{|\mathbf{c}_1|^2} \mathbf{c}_1 = (1, -1, 0, 1) + \frac{2}{2}(0, 1, 0, -1) = (1, 0, 0, 0)$.
$\mathbf{c}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{c}_1, \mathbf{v}_3 \rangle}{|\mathbf{c}_1|^2} \mathbf{c}_1 - \frac{\langle \mathbf{c}_2, \mathbf{v}_3 \rangle}{|\mathbf{c}_2|^2} \mathbf{c}_2 = (1, 3, 1, -1) - \frac{4}{2}(0, 1, 0, -1) - \frac{1}{1}(1, 0, 0, 0) = (0, 1, 1, 1)$.
Tehát a $\{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \}$ vektorrendszernek megfelelő ortogonális rendszer $\{(0, 1, 0, -1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 1) \}$, és a generált altér ortonormált bázisa ebből $\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, -1), \ (1, 0, 0, 0), \ \frac{1}{\sqrt{3}}(0, 1, 1, 1) \}$.

6. *Tekintsük az $(1, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 0)$ által kifeszített W alteret $V = \mathbb{Z}_2^4$ vektortérben.*
a) Mutassuk meg, hogy $W^\perp$ nem direkt kiegészítője W-nek.
b) Válasszunk ki a $\mathbb{Z}_2^4$ standard $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ bázisából két elemet, amelyek W-nek valamelyik direkt kiegészítőjét feszítik ki!

Megoldás: a) Látható, hogy $(1,1,0,0)$ merőleges W mindkét generátorelemére, tehát $W \cap W^{\perp} \neq 0$, így $W^{\perp}$ nem lehet direkt kiegészítője W-nek.
A W merőlegesét egyébként az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén egyenletrendszer megoldásával számíthatjuk ki, ahol A sorai a W egy generátorrendszere (a megoldás vektoros alakjából a $W^{\perp}$ bázisát is leolvashatjuk). Ezután a $W + W^{\perp}$ dimenzióját ellenőrizhetjük egy másik Gauss-eliminációval, amit a két generátorrendszer uniójára alkalmazunk. Mivel $\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V$, pontosan akkor lesz $V = W \oplus W^{\perp}$, ha $\dim(W + W^{\perp}) = \dim V$.
b) Végezzünk Gauss-eliminációt arra a mátrixra, amelynek első néhány oszlopa a W megadott generátorrendszere, a többi az, amiből a kiegészítést választhatjuk (ez lehet általában a teljes tér egy tetszőleges generátorrendszere). A lépcsős alak vezérelemei által megjelölt oszlopok a W bázisával kezdődnek, és ezt egészítik ki a többiek a V egy bázisává. Ne felejtsük el, hogy modulo 2 számolunk ebben a feladatban!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A bázisoszlopok az 1., 2., 3. és 5., tehát egy direkt kiegészítő altér egy lehetséges bázisa $\{\, \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_3 \,\}$.

7. *Tekintsük az $\mathbb{R}^2$-et mint euklideszi teret az $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ mátrix által megadott $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_A := \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ skalárszorzattal. Legyen $\mathbf{u} = (1,1)$, $\mathbf{v} = (1,-1)$.*
a) Mi lesz az $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle_A$ és $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_A$, skalárszorzatok értéke, és mi az $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$ hossza ebben az euklideszi térben?
b) Adjunk meg erre a skalárszorzatra nézve ortonormált bázist $\mathbb{R}^2$-ben!

Megoldás: Vegyük észre, hogy A pozitív definit, mert szimmetrikus, és $[x\,y] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^2 + 4xy + 5y^2 = (x+2y)^2 + y^2 > 0$ minden $(x,y) \neq \mathbf{0}$-ra. Tehát az A által definiált bilineáris függvény skalárszorzat, és $\mathbb{R}^2$ ezzel a skalárszorzattal euklideszi tér.
a) $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \mathbf{e}_i^T A \mathbf{e}_j$ az A mátrix ij indexű eleme. Tehát $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle_A = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle_A = 2$, $\mathbf{e}_1$ hossza $\sqrt{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle_A} = 1$, $\mathbf{e}_2$ hossza pedig $\sqrt{5}$ ebben az euklideszi térben.
$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T A \mathbf{v} = (3,7)(1,-1)^T = -4$.
b) Használjunk Gram–Schmidt-ortogonalizációt a $\langle\ ,\ \rangle_A$ skalárszorzatra nézve, az $\{\, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \,\}$ bázison.
$\mathbf{c}_1 = \mathbf{e}_1 = (1,0)$,
$\mathbf{c}_2 = \mathbf{e}_2 - \frac{\langle \mathbf{c}_1, \mathbf{e}_2 \rangle_A}{\langle \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_1 \rangle_A} \mathbf{c}_1 = (0,1) - 2(1,0) = (-2,1)$. Tehát $\{\, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \,\} = \{(1,0), (-2,1)\,\}$ ortogonális bázis, és $\langle \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_1 \rangle_A = 1$, $\langle \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_2 \rangle_A = [\,-2 \quad 1\,] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$, így ez egyúttal ortonormált bázis is.

Házi feladatok

Beadási határidő: március 7.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni. Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. *Az alábbi mátrix két elemét nem ismerjük, de tudjuk, hogy egyik sajátértéke* 3. *Mi a másik két sajátértéke?*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ * & * & 1 \end{bmatrix}.$$

2. *Adjunk meg olyan 2×2-es A mátrixot, amelyre $A^4 = A^2 \neq A$, és A-nak egyetlen eleme sem* 0. *(Útmutatás: keressünk a $D^4 = D^2 \neq D$ tulajdonságot kielégítő diagonális D mátrixot, és konjugáljuk el alkalmas P-vel.)*

3. *Határozzuk meg az alábbi mátrix spektrálfelbontását, és ennek segítségével számítsuk ki a mátrix* 10*-edik hatványát!*

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

4. *Az alábbi A mátrixnak mátrixnak van tiszta képzetes sajátértéke. Adjunk ennek abszolút értékére becslést a Gersgorin-körök segítségével!*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1-i \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & i \end{bmatrix}$$

5. *Adjuk meg az alábbi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ vektorok által kifeszített térnek egy ortonormált bázisát a standard skalárszorzatra nézve Gram-Schmidt-ortogonalizációval!*

$$\mathbf{v}_1 = (1,1,1,1),\ \mathbf{v}_2 = (1,2,1,2),\ \mathbf{v}_3 = (1,2,3,6).$$

Számítsuk ki a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ vektorok koordinátavektorait erre az ortonormált bázisra nézve!

6. *Igazoljuk, hogy $\mathbf{a}_1 = (1,0,0,0)$, $\mathbf{a}_2 = (0,0,1,1))$, $\mathbf{a}_3 = (0,0,1,-1)$, $\mathbf{a}_4 = (0,-1,0,0)$ vektorok ortogonális bázist alkotnak az $\mathbb{R}^4$ standard euklideszi térben. Legyen $W :=$ $\operatorname{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3)$. Számítsuk ki az $\mathbf{x} = (1,3,0,2)$ vektor W-re való merőleges vetületét, és bontsuk az $\mathbf{x}$ vektort egy W-beli és egy $W^\perp$-beli komponenens összegére!*

7*. *Legyen $K = \mathbb{Z}_p$, ahol p páratlan prím, és tekintsük a K^n vektorteret a standard $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ skalárszorzattal. Egy $\mathbf{v}$ vektort izotrópnak hívunk, ha $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$, azaz $\mathbf{v}$ „merőleges" önmagára. Bizonyítsuk be, hogy egy $U \leq K^n$ altérre akkor és csak akkor igaz, hogy $K^n = U \oplus U^\perp$, ha U-nak van nem izotróp vektorokból álló ortogonális bázisa. (Útmutatás: lássuk be először, hogy ha egy altér minden eleme izotróp, akkor az altér merőleges önmagára. $p = 2$-re ez nem igaz!)*