

1. Számítsuk ki az $\mathbf{a} = (1, i, 1 + i)$ és $\mathbf{b} = (1 - i, i, 1 + i)$ vektorok skaláris szorzatát és távolságát!

Megoldás: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 1(1 - i) - i \cdot i + (1 - i)(1 + i) = 4 - i$.

$|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = |(i, 0, 0)| = 1$.

2. Ortogonalizáljuk a \mathbb{C}^3 -beli $\{(i, 0, 1), (1, i, 1 + i)\}$ vektorrendszert, és egészítsük ki \mathbb{C}^3 ortogonális bázisává! Tegyük ortonormálttá ezt a bázist!

Megoldás: Egészítsük ki rögtön bázissá a $\mathbf{b}_1 = (i, 0, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (1, i, 1 + i)$ vektorrendszert, mondjuk, a $\mathbf{b}_3 = (0, 0, 1)$ vektorral, és ezt a bázist ortogonalizáljuk, akkor az új bázis első két vektora az eredeti vektorrendszer ortogonalizáltja lesz.

$\mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_1 = (i, 0, 1)$,

$\mathbf{c}'_2 = \mathbf{b}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{c}_1 = (1 - \frac{1}{2}i, i, \frac{1}{2} + i)$. Legyen $\mathbf{c}_2 = 2\mathbf{c}'_2 = (2 - i, 2i, 1 + 2i)$.

$\mathbf{c}'_3 = \mathbf{b}_3 - \frac{1}{2}\mathbf{c}_1 - \frac{1-2i}{14}\mathbf{c}_2 = (0, 0, 1) - \frac{1}{2}(i, 0, 1) - \frac{1}{14}(-5i, 4 + 2i, 5) = \frac{1}{7}(-i, -2 - i, 1)$.

Legyen $\mathbf{c}_3 = (-i, -2 - i, 1)$.

Tehát az eredeti vektorrendszer ortogonalizáltja $\{(i, 0, 1), (2 - i, 2i, 1 + 2i)\}$, az ennek kiegészítésével kapott ortogonális bázis $\{(i, 0, 1), (2 - i, 2i, 1 + 2i), (-i, -2 - i, 1)\}$, az ortonormált pedig $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(i, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{14}}(2 - i, 2i, 1 + 2i), \frac{1}{\sqrt{7}}(-i, -2 - i, 1)\}$.

3. Legyen $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{x} + i\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ vektor pontosan akkor merőleges a konjugáltjára, ha \mathbf{x} és \mathbf{y} a valós euklideszi térben azonos hosszúságú, egymásra merőleges vektorok!

Megoldás:

$$\langle \mathbf{x} - i\mathbf{y}, \mathbf{x} + i\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, i\mathbf{y} \rangle + \langle -i\mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle -i\mathbf{y}, i\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + i\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + i\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + i \cdot i \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle =$$

$$= |\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{y}|^2 + i\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + i\overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle} = |\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{y}|^2 + 2i\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0 \Leftrightarrow |\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{y}|^2 = 0 \text{ és } \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow |\mathbf{x}| = |\mathbf{y}| \text{ és } \mathbf{x} \perp \mathbf{y}.$$

4. Döntsük el az alábbi mátrixok mindegyikéről, hogy önadjungált, ferdén önadjungált, unitér, illetve normális-e?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Megoldás: B önadjungált, ezért normális is, de nem ferdén önadjungált, és nem unitér. C unitér, ezért normális is, de nem önadjungált, és nem is ferdén önadjungált. A nem unitér, nem önadjungált, és nem ferdén önadjungált. A normalitást ellenőrizhetjük az $A^*A = AA^*$ egyenlőséggel, vagy észrevehetjük, hogy A egy unitér (és így normális) mátrix skalárszorosa, ezért maga is normális. Végül D szintén nem önadjungált, ferdén önadjungált vagy unitér, és a normalitást ellenőrizve azt látjuk, hogy $D^*D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, míg $DD^* = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, ezért D nem is normális.