1. *Milyen kúpszeletet írnak le az alábbi egyenletek? Változtassuk meg a koordinátarendszert úgy, hogy az egyenletek $a(x')^2 + b(y')^2 = c$ alakúak legyenek!*
a) $x^2 - 4xy + y^2 + 6y - 2 = 0$
b) $xy = 1$

Megoldás: a) Teljes négyzetté való kiegészítéssel: $x^2 - 4xy + y^2 + 6y - 2 = (x - 2y)^2 - 3y^2 + 6y - 2 = (x - 2y)^2 - 3(y - 1)^2 + 1$, tehát az $x' = x - 2y$ és $y' = y - 1$ helyettesítéssel a görbe egyenlete $(x')^2 - 3(y')^2 = -1$. Ez egy hiperbola egyenlete, de a koordinátatranszformáció nem egybevágóság:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' + 2y' + 2 \\ y' + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

tehát az új koordinátarendszert úgy kapjuk meg a régiből, hogy az $(1, 0)$ és $(0, 1)$ bázisvektorok helyett az $(1, 0)$, $(2, 1)$-et választjuk, és az origót a $(2, 1)$ pontba toljuk. (Ortogonális transzformációval és eltolással is lehet diagonalizálni, ha pontosan szeretnénk ábrázolni a görbét, mint a 3. feladatban.)
b) $xy = \frac{1}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2 = 1$, azaz az $x' = x+y$ és $y' = x-y$, vagy másképpen $x = \frac{1}{2}(x'+y')$ és $y = \frac{1}{2}(x' - y')$ koordinátatranszformációval az $(x')^2 - (y')^2 = 4$ alakra jutunk. Itt az áttérés lineáris transzformáció, amelynek mátrixa $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Ez ugyan nem ortogonális, de ha helyette a $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ mátrixot használjuk, akkor az $(x')^2 - (y')^2 = 2$ hiperbola-egyenletet kapjuk, és ez már mérettartó transzformáció.

2. *Hozzuk diagonális alakra az $x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$ kvadratikus alakot! Adjunk meg egy bázist (nem feltétlenül ortogonálist), amelyben diagonális alakú!*

Megoldás: A kvadratikus alak mátrixa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$k_A(x) = -(x-3)(x-1)x$, és az egyes sajátértékekhez tartozó egy-egy normált sajátvektor: $\lambda_1 = 3$-hoz $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)$, $\lambda_2 = 1$-hez $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$, és $\lambda_3 = 0$-hoz $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$ ortonormált bázist alkotnak. Tehát

$$Q = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \text{-re } Q^{-1}AQ = Q^TAQ = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A kvadratikus alak az új bázisban $3(x_1')^2 + (x_2')^2$.

3. *Hozzuk kanonikus alakra az $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9 = 0$ egyenletű másodrendű görbe egyenletét és ábrázoljuk a görbét és az új koordinátarendszer tengelyeit az eredeti koordinátarendszerben!*

Megoldás: Az egyenlet mátrixos felírása:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -18 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 9 = 0.$$

A kvadratikus alak $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ mátrixát ortogonálisan diagonalizáljuk.
A sajátértékei 9 és 1, a hozzá tartozó ortonormált sajátbázis $\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1) \}$,
és a $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ortogonális mátrixszal $Q^{-1}AQ = Q^TAQ = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
Áttérve az új bázisra:

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$. Az egyenlet az új koordinátarendszerben:

$$0 = [\,x' \quad y'\,]\, Q^T A Q \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [\,-18 \quad -18\,]\, Q \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 9 = 9(x')^2 + (y')^2 + [\,-18\sqrt{2} \quad 0\,] \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 9 =$$
$$= 9(x')^2 + (y')^2 - 18\sqrt{2}x' + 9 = 9(x' - \sqrt{2})^2 + (y')^2 - 9,$$

amiből egy $x'' = x' - \sqrt{2}$ és $y'' = y'$ eltolással az

$$(x'')^2 + \left(\frac{y''}{3}\right)^2 = 1$$

kanonikus alakhoz jutunk. Ez egy ellipszis egyenlete, amelynek (az új koordinátarendszerben) a középpontja az origó, a vízszintes féltengelye 1, a függőleges 3 hosszú. A régiben ezek a tengelyek az $(1,1)$, illetve $(-1,1)$ bázisvektorokkal párhuzamosak, de a méretük ugyanakkora, mivel ortogonális transzformációt alkalmaztunk, és a középpont egyenlete az $x'' = 0$, $y'' = 0$ értékekből visszaszámolva $(x,y)^T = Q(x',y')^T = Q(\sqrt{2},0)^T = (1,1)^T$.

4. *Hozzuk az A mátrixot mint kvadratikus alak mátrixát diagonális alakra. Mutassuk meg, hogy A az alábbi B mátrixszal is kongruens: adjunk meg olyan P invertálható mátrixot, amelyre $B = P^T AP$.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Megoldás: A mátrix sajátértékei ± 3 és 0, így könnyen lehet ortogonálisan diagonalizálni (a különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok merőlegesek). Továbbá ebből tudhatjuk azt is, hogy a mátrix valóban kongruens a $B = \operatorname{diag}(1,0,-1)$ mátrixszal. A $3, 0, -3$ sajátértékekhez a sajátvektorok rendre $(2,2,1)$, $(-2,1,2)$ és $(1,-2,2)$. Tehát

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$P = \left(\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} =$$
$$\frac{1}{3\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 2 & -2\sqrt{3} & 1 \\ 2 & \sqrt{3} & -2 \\ 1 & 2\sqrt{3} & 2 \end{bmatrix}$$

invertálható mátrixszal $B = P^T AP$.

De szimultán sor-oszlopműveletekkel is diagonalizálhatunk (a Sylvester-tétel szerint abban a diag. alakban is egy pozitív, egy 0 és egy negatív diag. elem lesz valamilyen sorrendben), és aztán azt módosítjuk, hogy a B mátrixot kapjuk.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \overset{s}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \overset{s}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{s}{\mapsto}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \overset{s}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(A diagonális elemeket úgy permutálhatjuk a diagonális mátrixban, hogy a sorokon és az oszlopokon is végrehajtjuk ugyanazt a permutációt.) Ebből leolvashatjuk a P áttérési mátrixot, ha az egységmátrixra végrehajtjuk az elvégzett oszlopműveleteket.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = P$$

mátrixra $P^T AP = B$.

5. *Milyen feltétel mellett lesz az alábbi valós mátrix pozitív, illetve negatív definit? Milyen jellege lehet még a mátrixnak más a értékekre?*

$$A = \begin{bmatrix} a & 2 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

Megoldás: A főminorjai rendre a, $a^2 - 4$, $a(a^2 - 4)$. Ezek akkor mind pozitívak, ha $a > 2$, tehát ekkor lesz A pozitív definit, és akkor $-, +, -$ előjelűek, ha $a < -2$, tehát A pontosan ekkor negatív definit. Ahhoz, hogy valamilyen szemidefinit, de ne definit legyen, az A mátrixnak szingulárisnak kell lennie, azaz $|A| = (a^2 - 4)a = 0$, és ez csak $a = 0, 2, -2$ esetén teljesül. Könnyen látható, hogy $a = 0$ esetén a mátrix indefinit: a $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ bal fölső sarokmátrix sajátértékei ± 2, tehát az indefinit, és így A is. Ha $a = 2$, akkor szimultán sor-oszlopműveletekkel $A \cong \mathrm{diag}(2, 0, 2)$, ha pedig $a = -2$, akkor $A \cong \mathrm{diag}(-2, 0, -2)$.
Összefoglalva: A negatív definit, ha $a < -2$, negatív szemidefinit (de nem definit), ha $a = -2$, pozitív szemidefinit (de nem definit), ha $a = 2$, pozitív definit, ha $a > 2$, és a maradék esetekben, tehát $-2 < a < 2$ esetén, indefinit.

6. *a) Bizonyítsuk be, hogy $x^4 + 5x^3 + x + 6$ nem lehet egy valós szimmetrikus mátrix karakterisztikus polinomja.*
b) Egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix karakterisztikus polinomja $k_A(x) = -(x^3 + 2x^2 - 10x + 6)$. A Descartes-féle előjelszabály segítségével állapítsuk meg a mátrix jellegét!

Megoldás: a) Az $f(x) = x^4 + 5x^3 + x + 6$ polinomnak nyilván nem lehet pozitív gyöke, ehhez még a Descartes-féle előjelszabály sem kell. Az $f(-x) = x^4 - 5x^3 - x + 6$ polinom együtthatóin két előjelváltás van, ezért f-nek legföljebb két valós negatív gyöke lehet (multiplicitással számolva). Ebből következik, hogy f-nek nem minden gyöke valós, tehát nem lehet egy szimmetrikus mátrix karakterisztikus polinomja.
b) A polinom együtthatói kétszer váltanak előjelet. Mivel tudjuk, hogy minden gyöke valós, ebből következik, hogy a pozitív gyökök száma pontosan 2, így van negatív gyöke is, tehát a mátrix indefinit.

7. *Bizonyítsuk be, hogy egy pozitív szemidefinit és egy pozitív definit mátrix összege mindig pozitív definit.*

Megoldás: Ha P pozitív definit, S pedig pozitív szemidefinit, akkor először is $P+S$ is szimmetrikus: $(P+S)^T = P^T + S^T = P+S$, másodszor minden $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektorra $\mathbf{x}^T(P+S)\mathbf{x} = \mathbf{x}^T P\mathbf{x} + \mathbf{x}^T S\mathbf{x} > 0$, ugyanis az első tag pozitív, a második nemnegatív. Tehát $P + S$ pozitív definit.