1. *Határozzuk meg az* $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ *mátrix pozitív (szemi)definit négyzetgyökét, és a Cholesky-felbontását, ha van.*

Megoldás: A főminorjai 5 és 9, ezért A pozitív definit, és így pozitív definit négyzetgyöke és Cholesky-felbontása is van.
$k_A(x) = x^2 - 10x + 9 = (x-1)(x-9)$, az 1-hez tartozó normált sajátvektor $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$, a 9-hez tartozó $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$, a diagonalizáló ortogonális mátrix $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, a diag. alak $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$.
Ebből $A = QDQ^{-1}$, és

$$B = Q\sqrt{D}Q^{-1} = Q\sqrt{D}Q^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\text{-re}$$

$B^2 = A$, és B pozitív definit, mert pozitív átlójú diagonálissal kongruens.

B-t spektrálfelbontással is kiszámíthatjuk, miután ellenőriztük, hogy A diagonalizálható, minthogy valós szimmetrikus, és a sajátértékei 1 és 9.

$$\begin{array}{rcrcl} P_1 & + & P_2 & = & I \\ P_1 & + & 9P_2 & = & A \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & I \\ 1 & 9 & A \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & I \\ 0 & 8 & A-I \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \frac{1}{8}(9I-A) \\ 0 & 1 & \frac{1}{8}(A-I) \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$A = 1P_1 + 9P_2 = 1\cdot\frac{1}{8}(9I-A) + 9\cdot\frac{1}{8}(A-I) = 1\cdot\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + 9\cdot\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$B = 1\cdot\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + 3\cdot\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

A Cholesky-felbontást LU-felbontás segítségével számítjuk ki.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & \frac{9}{5} \end{bmatrix} = U, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & \frac{9}{5} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & \frac{9}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

így $R = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ felső háromszögmátrixra $A = R^T R$.

2. *Tekintsük a* $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T B\mathbf{y}$ *valós bilineáris függvényt, ahol* $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

a) Határozzuk meg, a hozzá tartozó kvadratikus alak mátrixát és jellegét!
b) Adjunk meg $\mathbb{R}^2$*-ben olyan bázist, amelyben a kvardatikus alak négyzetösszeg, és írjuk fel ebben a bázisban a kvadratikus alakot!*

Megoldás: A kvadratikus alak mátrixa az alábbi A mátrix:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 4 \end{bmatrix} \overset{sor}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{9}{4} \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{9}{4} \end{bmatrix} = D \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = P.$$

Tehát a kvadratikus alak indefinit, az új bázis $\mathcal{B} = \{(1,0),\ (-\frac{5}{2},1)\}$. A kvadratikus alak a standard bázisban $x_1^2 + 5x_1x_2 + 4x_2^2$, a $\mathcal{B}$-ben felírt négyzetösszeg alakja pedig $(x_1')^2 - \frac{9}{4}(x_2')^2$, ahol $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1' - \frac{5}{2}x_2' \\ x_2' \end{bmatrix}$.

3. *Határozzuk meg a $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{y}$ valós bilineáris függvényre nézve a $W = \operatorname{span}((1,1,0),(0,2,1))$ altér jobb és bal oldali merőlegesét, ha*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Legyen

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a W báziselemeiből mint oszlopokból álló mátrix. Ekkor
$W^\perp = \{\, \mathbf{x} \mid \langle \mathbf{w}, \mathbf{x}\rangle = 0 \ \forall \mathbf{w} \in W \,\} = \{\, \mathbf{x} \mid B^T A\mathbf{x} = \mathbf{0} \,\} = \mathcal{N}(B^T A)$.

$$B^T A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = t \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

tehát $W^\perp = \operatorname{span}((-2,-1,1))$,
és ${}^\perp W = \{\, \mathbf{x} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}\rangle = 0 \ \forall \mathbf{w} \in W \,\} = \{\, \mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T AB = \mathbf{0}^T \,\} = \{\, \mathbf{x} \mid (AB)^T \mathbf{x} = \mathbf{0} \,\} = \mathcal{N}((AB)^T)$

$$(AB)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \mapsto \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = t \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

tehát ${}^\perp W = \operatorname{span}((4,1,-2))$.

4. *Legyen egy φ komplex skalárszorzat (azaz pozitív definit hermitikus bilin. fv.) Gram-mátrixa az $\mathcal{E} = \{\, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \,\}$ standard bázisban $\begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$.*

a) Számítsuk ki $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ hosszát és skaláris szorzatát a $(\mathbb{C}^2, \varphi)$ euklideszi térben.
b) Adjunk meg egy φ-ortonormált bázist $\mathbb{C}^2$-ben!
c) Adjuk meg φ Gram-mátrixát abban a $\mathcal{B}$ bázisban, amelynek elemei $\mathbf{b}_1 = (1, i)$ és $\mathbf{b}_2 = (1,-1)$.

Megoldás: a) A standard bázis elemeinek skalárszorzatát egyszerűen leolvashatjuk a Gram-mátrixból: $\mathbf{e}_i^* A\mathbf{e}_j = a_{ij}$. Tehát $|\mathbf{e}_1|_\varphi = \sqrt{\varphi(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1)} = \sqrt{2}$, $|\mathbf{e}_2|_\varphi = \sqrt{2}$, és $\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = i$.

b) A φ-ortogonalizáláshoz a második bázisvektort kell ortogonalizálni az elsőre.

$$\mathbf{c}_2' := \mathbf{e}_2 - \frac{\varphi(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)}{\varphi(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1)}\mathbf{e}_1 = (0,1) - \frac{i}{2}(1,0) = \left(-\frac{i}{2}, 1\right) \Rightarrow \mathbf{c}_2 = (-i, 2).$$

Tehát $\{\, \mathbf{e}_1, \mathbf{c}_2 \,\}$ φ-ortogonális vektorrendszer, és $\mathbf{e}_1$ φ-normája $\sqrt{2}$, míg

$$\varphi(\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_2) = [\, i \quad 2 \,] \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i \\ 2 \end{bmatrix} = 6,$$

ezért $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0),\ \frac{1}{\sqrt{6}}(-i,2) \right\}$ φ-ortonormált bázis.

c) Az $\mathcal{B}$ bázisra való áttérés P mátrixa és az új bázisbeli Gram-mátrix:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -1 \end{bmatrix}, \qquad [f]_\mathcal{B} = P^*[f]_\mathcal{E} P = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 4 \end{bmatrix}.$$

5. *Legyen $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}^* A\mathbf{y}$ az alábbi A mátrixszal.*

a) Számítsuk ki a $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})$ értékét $\mathbf{x} = (1, i, 0)$, $\mathbf{y} = (2-i, 1, 1)$-re.
b) Adjuk meg a φ által definiált kvadratikus alakot.

c) *Diagonalizáljuk az A mátrixot mint Gram-mátrixot, és adjunk φ-ortogonális bázist $\mathbb{C}^3$-ben. Mi a kvadratikus alak jellege?*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 2 & 1 \\ 1-i & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Megoldás: a)

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^* A \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 2 & 1 \\ 1-i & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2-i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 - i$$

b) $q(\mathbf{x}) = |x_1|^2 + 2|x_2|^2 + 3|x_3|^2 + i\bar{x}_1 x_2 - i\bar{x}_2 x_1 + (1+i)\bar{x}_1 x_3 + (1-i)\bar{x}_3 x_1 + \bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_3 x_2$

c) Szimultán sor-oszlopműveletekkel diagonalizáljunk, egyúttal egy másik sorban az egységmátrixra is alkalmazzuk az elvégzett oszlopműveleteket, így előállítva az áttérési mátrixot. Arra kell figyelni, hogy ha a sorművelet $s_i \mapsto s_i + cs_j$, akkor az oszlopművelet $o_i \mapsto o_i + \bar{c}o_j$.

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 2 & 1 \\ 1-i & 1 & 3 \end{bmatrix} \underset{s_3-(1-i)s_1}{\overset{s_2+is_1}{\longmapsto}} \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 0 & -i & 1 \end{bmatrix} \underset{o_3-(1+i)o_1}{\overset{o_2-io_1}{\longmapsto}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & -i & 1 \end{bmatrix} \overset{s_3+is_2}{\longmapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{o_3-io_2}{\longmapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = D$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{o_3-(1+i)o_1}{\overset{o_2-io_1}{\longmapsto}} \begin{bmatrix} 1 & -i & -1-i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{o_3-io_2}{\longmapsto} \begin{bmatrix} 1 & -i & -2-i \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P$$

Tehát a kvadratikus alak mátrixának (egyik) diagonális alakja $D = \operatorname{diag}(1,1,0)$, és az ehhez tartozó bázis $\{(1,0,0),\ (-i,1,0),\ (-2-i,-i,1)\}$. A kvadratikus alak pozitív szemidefinit.

6. *Bizonyítsuk be, hogy minden indefinit hermitikus bilineáris függvényre nézve van olyan nem nulla vektor, amely merőleges önmagára!*

Megoldás: Ha a φ bilineáris függvény indefinit, akkor van olyan φ-ortogonális bázis, amelynek elemein a φ-hez tartozó kvadratikus alak pozitív és negatív értéket is fölvesz. Legyen $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ ez a két báziselem. Ekkor $\varphi(\mathbf{b},\mathbf{b}) = s^2$, $\varphi(\mathbf{c},\mathbf{c}) = -t^2$, és $\varphi(\mathbf{b},\mathbf{c}) = \varphi(\mathbf{c},\mathbf{b}) = 0$, ahol s,t nemnulla valós számok. Az $\mathbf{u} = t\mathbf{b} + s\mathbf{c}$ vektor nem nulla, mert különben $\mathbf{c} = -\frac{t}{s}\mathbf{b}$-re $\varphi(\mathbf{c},\mathbf{c}) = \frac{t^2}{s^2}\varphi(\mathbf{b},\mathbf{b}) > 0$ lenne, és $\varphi(\mathbf{u},\mathbf{u}) = t^2\varphi(\mathbf{b},\mathbf{b}) + s^2\varphi(\mathbf{c},\mathbf{c}) - st\varphi(\mathbf{b},\mathbf{c}) - st\varphi(\mathbf{c},\mathbf{b}) = t^2s^2 - s^2t^2 = 0$.

7. *Tekintsük $\mathbb{R}^2$-en a $\varphi(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \det[\mathbf{u} \mid \mathbf{v}]$ bilineáris függvényt. Írjuk fel φ Gram-mátrixát a standard bázisban! Van-e $\mathbb{R}^2$-nek φ-ortogonális bázisa?*

Megoldás:

$\varphi(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $\varphi(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $\varphi(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$, $\varphi(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Tehát a Gram-mátrix a standard bázisban $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Nincs φ-ortogonális bázis, mert ha lenne, akkor A kongruens lenne egy diagonális, így szimmetrikus mátrixszal, tehát A maga is szimmetrikus lenne.