1. *Számítsuk ki az* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *mátrix redukált és teljes SVD-felbontását!*

Megoldás: $A^*A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $k_{A^*A} = x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1)$.
$\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$, $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
A^*A-hoz ortonormált sajátbázis a sajátértékek $3, 1$ sorrendjében: $\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1) \}$.
$V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $AV_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $U_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 2 & 0 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$ (AV_1 első oszlopát $\sigma_1 = \sqrt{3}$-mal, a másodikat $\sigma_2 = 1$-gyel osztottuk le.)
Redukált felbontás: $A = U_1 \Sigma_1 V_1^* = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 2 & 0 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ A teljes felbontáshoz csak U_1-et kell kiegészíteni unitérré (ortogonálissá), és Σ_1-et nullákkal 3×2-essé, mert V_1 maga is unitér. U_1-ben harmadik oszlopnak jó lesz az első kettő vektoriális szorzata, így a teljes felbontás:
$A = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

2. *Legyen* $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ *normális mátrix,* $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ *szinguláris értékekkel. Lássuk be, hogy* $B = A + cI$ *is normális tetszőleges* $c \in \mathbb{C}$*-re, és a legnagyobb szinguláris értéke legföljebb* $\sigma_1 + |c|$*.*

Megoldás: Egy mátrix pontosan akkor normális, ha unitérrel diagonális alakba konjugálható: $U^{-1}AU = D$. De ekkor $U^{-1}(A + cI)U = U^{-1}AU + U^{-1}cIU = D + cI$ szintén diagonális, tehát $A + cI$ is normális mátrix.
Feltehető, hogy D átlójában a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sajátértékek az abszolút értékek csökkenő sorrenjében következnek. Az A normalitása miatt a szinguláris értékek ekkor $|\lambda_1|, \dots, |\lambda_r|$, és $\sigma_1 = |\lambda_1|$. $A + cI$ diagonális alakjának átlós elemei $\lambda_1 + c, \dots, \lambda_n + c$, s mivel $A + cI$ is normális, a legnagyobb szinguláris értéke a spektrálsugara (azaz a sajátértékek abszolút értékei közül a legnagyobb). Viszont $|\lambda_i + c| \le |\lambda_i| + |c| \le \sigma_1 + |c|$, tehát ez legföljebb $\sigma_1 + |c|$.

3. *Lássuk be, hogy az alábbi* A *mátrix normális! Határozzuk meg az SVD-felbontását!*

$$\begin{bmatrix} 1+2i & -i \\ i & 1+2i \end{bmatrix}$$

Megoldás: $A = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} + (1+2i)I$, ahol az első mátrix önadjungált (mellesleg unitér is), ezért normális, tehát a 6. feladat szerint A is normális.
$A^*A = \begin{bmatrix} 1-2i & -i \\ i & 1-2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+2i & -i \\ i & 1+2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2i \\ 2i & 6 \end{bmatrix}$, kar. pol.-ja $x^2 - 12x + 32 = (x-8)(x-4)$,
$\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 4$, $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $AV_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2-2i & -2 \\ 2+2i & 2i \end{bmatrix}$
$U_1 = \begin{bmatrix} (1-i)/2 & -1/\sqrt{2} \\ (1+i)/2 & i/\sqrt{2} \end{bmatrix}$.
$A = \begin{bmatrix} (1-i)/2 & -1/\sqrt{2} \\ (1+i)/2 & i/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{bmatrix}$ a redukált és a teljes felbontás is.
(Használhattuk volna az SVD-felbontáshoz azt is, hogy A normális, a sajátértékei a $B = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ sajátértékeinél $(1+2i)$-vel nagyobbak, tehát $2+2i$ és $2i$, és a B ONB-a A-hoz is jó. Tehát $Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$-rel $Q^{-1}AQ = D = \mathrm{diag}(2+2i, 2i)$. A diagonálisból pedig leválasztva az abszolútértékekből (a normális A mátrix szinguláris értékeiből) álló $\mathrm{diag}(2\sqrt{2}, 2)$ diagonálist, $U = Q\mathrm{diag}(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i, i)$ és $V^* = Q^*$ mátrixokkal $A = U\Sigma V^*$.)

4. *Határozzuk meg az alábbi mátrixok redukált SVD-felbontását!*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás: a) Mivel az A mátrix önadjungált (elég, hogy normális), tartozik hozzá ortonormált sajátbázis, sőt ezt vehetjük úgy, hogy a megfelelő sajátértékek abszolút értékei csökkenőek legyenek: -2-höz $(0,1)$, 1-hez $(1,0)$ tartozik. Így a $V = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrixszal

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A diagonális mátrixban módosíthatjuk az előjeleket egy unitér mátrixszal való szorzással.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ebben a felbontásban a két szélső mátrix unitér, a középső pedig nemnegatív diagonális, amelyben a diagonális elemek fogyó sorrendben vannak, ezért ezek a diagonális elemek csak a szinguláris értékek lehetnek, és a felbontás a teljes SVD-felbontás. A redukált ugyanez, mert a mátrix teljes rangú négyzetes mátrix.

b) Itt is alkalmazhatunk egyszerűsített módszert, mivel a mátrix rangja 1. Ekkor $\mathcal{O}(V_1) = \mathcal{O}(B^*B) = \mathcal{O}(B^*) = \overline{\mathcal{S}(B)} = \langle (1,1) \rangle$, tehát $V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, és a $BV_1 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ szorzatból $U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ és $\Sigma_1 = [\,2\,]$. Tehát a redukált SVD-felbontás

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot [\,2\,] \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} [\,1 \quad 1\,].$$

c) Érdemes a mátrix transzponáltjára kiszámítani a felbontást, mert akkor kisebb mátrixra (csak 2×2-esre a 3×3-as helyett) kell sajátvektorokat keresni, és aztán a felbontást megtranszponálni.

$$C^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad CC^* = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad k_{CC^*}(x) = x^2 - 10x + 9, \quad \lambda_1 = 9,\ \lambda_2 = 1$$

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C^*V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A C^*V_1 oszlopait a megfelelő szinguláris értékekkel ($\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 3$, $\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 1$) leosztva megkapjuk a U_1 mátrixot:

$$C^* = U_1 \Sigma_1 V_1^* = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Így az eredeti mátrix redukált SVD-felbontása:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

5. *Írjuk fel a 4. feladatbeli B és C mátrixok teljes SVD-felbontását és a C mátrix SVD-felbontásának diadikus alakját!*

Megoldás: A B teljes SVD-felbontásához tetszőlegesen kiegészítjük a redukált felbontásbeli szemiortogonális mátrixokat ortogonálissá, és a Σ_1-et B-vel megegyező méretű Σ-vá:

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

A C mátrix teljes SVD-felbontása a redukált felbontás kiegészítésével:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/3\sqrt{2} & -4/3\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}.,$$

ahol az utolsó mátrix harmadik sora az első két sor vektoriális szorzata.
C diadikus felbontása a redukált SVD felbontásból

$$3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & -4 & 1 \end{bmatrix} + 1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= 3\cdot\begin{bmatrix} 1/6 & 4/6 & -1/6 \\ -1/6 & -4/6 & 1/6 \end{bmatrix} + 1\cdot\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

6. *Számítsuk ki a 4. feladatbeli B és C mátrixok pszeudoinverzét az SVD-felbontás segítségével!*

Megoldás: Az $U_1\Sigma_1V_1^*$ redukált felbontású mátrix pszeudoinverze $V_1\Sigma^{-1}U_1^*$.

$$B^+ = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C^+ = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}^+ = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Vagy a C-t a diadikus alakból (a szinguláris értékek reciprokát véve, a diádokat pedig megtranszponálva, illetve csillagozva:

$$C^+ = \frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix} 1/6 & -1/6 \\ 4/6 & -4/6 \\ -1/6 & 1/6 \end{bmatrix} + 1\cdot\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 4 & -4 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

7. *Számítsuk ki a 4. feladatbeli négyzetes mátrixok polárfelbontását! Melyiknek van többféle is?*

Megoldás: Ha $A = U\Sigma V^*$ teljes SVD-felbontás, akkor A polárfelbontása $A = (U\Sigma U^*)(UV^*)$.
Az 1. feladat első két mátrixára ez $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, és $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.
Az invertálható A mátrixnak egyértelmű a polárfelbontása, B polárfelbontásában viszont az ortogonális mátrix többféle is lehet, például a $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ felbontás is megfelel.

8. *Legyen $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.*

a) Adjuk meg A SVD-felbontását, és legjobb 1 rangú közelítését!
b) Az a) rész eredményét felhasználva adjuk meg A inverzének is az SVD-felbontását és legjobb 1 rangú közelítését!
c) Mennyi a fenti közelítések hibája Frobenius-normában?

Megoldás: a) Mivel A önadjungált, pozitív definit mátrix, az SVD-felbontását közvetlenül az unitér (sőt ortogonális) diagonalizálásával is megkaphatjuk. A sajátértékei 6 és 1, a hozzájuk tartozó ortonormált sajátvektorok $\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)$ és $\frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)$. Tehát $Q = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$-re $Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, azaz

$$A = QDQ^{-1} = QDQ^* = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{ahol } U = V = Q,\ \Sigma = D$$

Ebből a legjobb 1 rangú közelítés:

$$A^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}[6]\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{6}{5}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24/5 & 12/5 \\ 12/5 & 6/5 \end{bmatrix}.$$

b)

$$A^{-1} = A^{+} = V\Sigma^{-1}U^* = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

ami csak azért nem SVD-felbontás, mert rossz sorrendben vannak a szinguláris értékek és a jobb és bal szinguláris vektorok. Ezeknek a sorrendjét megfordítva:

$$A^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ebből az A^{-1} legjobb 1 rangú legjobb közelítése

$$(A^{-1})^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}[1]\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & -2/5 \\ -2/5 & 4/5 \end{bmatrix}.$$

Még egyszerűbben kiszámolhatjuk A és A^{-1} alacsony rangú közelítését az A diadikus SVD-felbontásából:

$$A = 6\cdot\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 1\cdot\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = 1\cdot\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(a szinguláris értékeknek a reciprokát vettük, a diádokat transzponáltuk, bár ez ebben az esetben nem látszik rajtuk, és a tagokat a szinguláris értékek szerint fogyó sorrendbe raktuk), és ebből

$$A^{(1)} = 6\cdot\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24/5 & 12/5 \\ 12/5 & 6/5 \end{bmatrix}, \quad (A^{-1})^{(1)} = \begin{bmatrix} 1/5 & -2/5 \\ -2/5 & 4/5 \end{bmatrix}.$$

c) A közelítés hibája az eredeti és a közelítő mátrix különbségének Frobenius-normája:

$$\|A - A^{(1)}\|_F = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{4}{25} + \frac{4}{25} + \frac{16}{25}} = 1,$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \|A^{-1} - (A^{-1})^{(1)}\|_F = \frac{1}{30}\sqrt{4^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2} = \frac{1}{6},$$

ami megfelel a tételbeli képletnek, mivel az első esetben az A mátrix 1, a másodikban az A^{-1} mátrix $\frac{1}{6}$ szinguláris értékéhez tartozó részt hagytuk el.