1. *Írjuk fel az alábbi mátrix karakterisztikus polinomját és minimálpolinomját!*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Mivel A felső háromszögmátrix, a karakterisztikus polinom közvetlenül leolvasható belőle: $k_A(x) = -(x-1)(x-2)^2$. Az $m_A(x)$ minimálpolinom osztója ennek, de minden sajátérték gyöke $m_A(x)$-nek, így $m_A(x) = (x-1)(x-2)$ vagy $(x-1)(x-2)^2$.

$$(A-I)(A-2I) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

így $m_A(x) = (x-1)(x-2)$.
(Mellesleg ez abból is következik, hogy $\dim V_2 = 2$, így A minden sajátértékének megegyezik az algebrai és geometriai multiplicitása $\Rightarrow$ A diagonalizálható $\Rightarrow$ a minimálpolinomja a külöböző sajátértékekhez tartozó gyöktényezők szorzata.)

2. *Van-e az egységmátrixon kívül olyan mátrix $\mathbb{R}^{2\times 2}$-ben, illetve $\mathbb{Q}^{2\times 2}$-ben, amelynek az ötödik hatványa az egységmátrix?*

Megoldás: Valós mátrixból van ilyen: az origó körüli 72°-os forgatás mátrixa.
Tegyük fel, hogy $A \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$, és $A^5 = I$. Ekkor az $x^5 - 1$ polinom annullálja az A mátrixot, következésképpen $m_A(x) \mid (x^5 - 1)$. De $x^5 - 1$ irreducibilisekre bontása $\mathbb{Q}[x]$-ben $(x-1)\Phi_5(x) = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$, ezért $m_A(x)$ irreducibilis tényezői is ezek közül valók. De $\deg m_A(x) \leq \deg k_A(x) = 2$, így csak $x-1$ szerepelhet $m_A(x)$-ben, s mivel x^5-1-nek osztója, $m_A(x) = x-1$, amiből $A = I$ következik. Tehát az egységmátrixon kívül nincs más ilyen racionális elemű mátrix.

3. *Lássuk be, hogy a 2×2-es mátrixok között pontosan azok hasonlók, amelyeknek megegyezik a minimálpolinomjuk, de 3×3-as mátrixokra ez már nem igaz.*

Megoldás: A minimálpolinom osztója a karakterisztikus polinomnak, ezért egy 2×2-es mátrix minimálpolinomja legföljebb másodfokú lehet.
Ha $\deg m_A(x) = 1$, azaz $m_A(x) = x - c$ alakú, akkor $A - cI = O$, azaz $A = cI$, tehát a mátrix (nemcsak hasonlóság erejéig) egyértelmű.
Tfh. $\deg m_A(x) = 2$.
Ha $m(x)$ reducibilis, azaz $m(x) = (x-c)(x-d)$ valamely $c, d \in K$-ra, akkor $c \neq d$ esetén két különböző sajátértéke van, tehát A diagonalizálható, és $A \sim \mathrm{diag}(c,d)$. Ha $c = d$, akkor c az egyetlen sajátértéke, de $\dim V_c = 1$, mert különben $x - c$ lenne a minimálpolinom. Így van olyan $\mathbf{v} \in K^2$, amely nem sajátvektora A-nak. Az ilyen $\mathbf{v}$-re $\mathbf{v}$ és $A\mathbf{v}$ lineárisan függetlenek, és az A mátrixa a $\mathcal{B} = \{\, \mathbf{v}, A\mathbf{v} \,\}$ bázisban éppen az $m_A(x)$ kísérőmátrixa a kísérőmátrix konstrukciója szerint. Ezért az $(x-c)^2$ minimálpolinomú mátrixok mind hasonlók az $(x-c)^2$ kísérőmátrixához, $\begin{bmatrix} 0 & -c^2 \\ 1 & 2c \end{bmatrix}$-hez, így egymáshoz is.
Ha $m(x)$ irreducibilis, akkor nincs sajátvektora, tehát bármely $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ vektorra függetlenek a $\mathbf{v}$ és $A\mathbf{v}$ vektorok, s így a $\mathcal{B} = \{\, \mathbf{v}, A\mathbf{v} \,\}$ bázisban az előző esethez hasonlóan A mátrixa megegyezik az $m(x)$ kísérőmátrixával. Tehát ebben az esetben is hasonlók az $m(x)$ minimálpolinomú mátrixok.
Viszont a 3×3-as mátrixok közül $m(x) = x(x-1)$ a minimálpolinomja a $\mathrm{diag}(1,1,0)$ és a $\mathrm{diag}(1,0,0)$ mátrixnak is, amelyek nyilván nem hasonlók, mert például különböző rangúak.

4. *Legyen $f : V \to V$ lineáris transzformáció, és $U \leq V$ 1-dimenziós altér. Bizonyítsuk be, hogy U akkor és csak akkor f-invariáns, ha része az f egy sajátalterének.*

Megoldás: Ha $U = \mathrm{span}(\mathbf{u}) \leq V_\lambda$, akkor $f(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u} \in U$, tehát U f-invariáns.
Fordítva, ha $U = \mathrm{span}(\mathbf{u})$ f-invariáns, ahol $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, akkor $f(\mathbf{u}) \in \mathrm{span}(\mathbf{u})$ miatt $f(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u}$ valamely $\lambda \in K$-ra, tehát $\mathbf{u}$ sajátvektor λ sajátértékkel, és így $U = \mathrm{span}(\mathbf{u})$ benne van a V_λ sajátaltérben.

5. *Van-e az A mátrixnak 1-dimenziós, illetve 2-dimenziós invariáns altere $\mathbb{R}^4$-ben?*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Ha van egydimenziós invariáns altér, akkor az előző feladat szerint van az A-nak valós sajátértéke. Viszont A karakterisztikus polinomja

$$k_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1-x & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2-x & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1-x & -1 & 2 \\ 3 & -2-x & 2 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 1-x & 1 & -1 \\ 1 & 1-x & -1 \\ 4 & 3 & -2-x \end{vmatrix} =$$

$-(-2-6+4+2x+2-2x) - x(-x^3+3x-2-4-3+4-4x+2+x+3-3x) = 2 - x(-x^3-3x) = x^4+3x^2+2 = (x^2+1)(x^2+2)$, amelynek nincs valós gyöke, így $\mathbb{R}^4$-ben nincs egydimenziós A-invariáns altér.

Mivel $k_A(x)$ minden $\mathbb{C}$-beli gyöke egyszeres, A-nak mint komplex mátrixnak a minimálpolinomja is $(x^2+1)(x^2+2)$. De akkor az $\mathbb{R}[x]$-beli minimálpolinomja sem lehet kisebb fokú. Ez azt jelenti, hogy $k_A(A) = (A^2+I)(A^2+2I) = O$, viszont A^2+2I nem nulla, ezért A^2+I nem lehet invertálható. Keressük meg A^2+I magját!

$$A^2 + I = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tehát $\operatorname{Ker}(A^2+I)$ a 2-dimenziós $\operatorname{span}((-1,1,0,0),(0,0,1,1))$ altér, és tudjuk, hogy A tetszőleges polinomjának magtere, tehát ez is, A-invariáns.

Másképp: keressünk egy sajátvektort $\mathbb{C}^4$-ben! A sajátértékek $\pm i$, $\pm 2i$.

$$A - iI = \begin{bmatrix} 1-i & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1-i & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2-i & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & -1 & 1+i \\ 0 & 1-i & -1 & 2+i \\ 0 & 3 & -2-i & 2+4i \end{bmatrix} \mapsto$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & -1 & 1+i \\ 0 & 0 & -i & i \\ 0 & 0 & 1-i & -1+i \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Egy sajátvektor $\mathbf{v} = (i,-i,1,1)$, tehát $A\mathbf{v} = i\mathbf{v}$, így $A\operatorname{Re}\mathbf{v} + iA\operatorname{Im}\mathbf{v} = A\mathbf{v} = i(\operatorname{Re}\mathbf{v} + i\operatorname{Im}\mathbf{v}) = -\operatorname{Im}\mathbf{v} + i\operatorname{Re}\mathbf{v}$, s mivel A valós mátrix, ebből $A\operatorname{Re}\mathbf{v} = -\operatorname{Im}\mathbf{v}$ és $A\operatorname{Im}\mathbf{v} = \operatorname{Re}\mathbf{v}$ következik, tehát $U = \operatorname{span}(\operatorname{Re}\mathbf{v}, \operatorname{Im}\mathbf{v}) = \operatorname{span}((0,0,1,1),(1,-1,0,0))$ kétdimenziós invariáns altér.

6. *Bizonyítsuk be, hogy egy $A = \operatorname{diag}(B_1,\dots,B_k)$ blokkdiagonális mátrix karakterisztikus polinomja a B_i mátrixok karakterisztikus polinomjának szorzata, minimálpolinomja pedig a B_i mátrixok minimálpolinomjának legkisebb közös többszöröse.*

Megoldás: $k_A(x) = |A - xI| = |\operatorname{diag}(B_1 - xI,\dots,B_k - xI)| = |B_1 - xI|\cdots|B_k - xI| = k_{B_1}(x)\cdots k_{B_k}(x)$.

Tetszőleges $f(x) \in K[x]$ polinomra $f(A) = \operatorname{diag}(f(B_1),\dots,f(B_k))$, így $f(A) = O \Leftrightarrow f(B_i) = O\ \forall i \Leftrightarrow m_{B_i}(x) \mid f(x)\ \forall i \Leftrightarrow [m_{B_1}(x),\dots,m_{B_k}(x)] \mid f(x)$, tehát A minimálpolinomja $m_A(x) = [m_{B_1}(x),\dots,m_{B_k}(x)]$.

7. *Mi lehet a Jordan-féle normálalakja annak a komplex mátrixnak, amelynek a*

a) karakterisztikus polinomja $(x-1)^6$, minimálpolinomja $(x-1)^4$, az 1-hez tartozó V_1 sajátaltér dimenziója 2;

b) karakterisztikus polinomja $-(x-\lambda)^7$, minimálpolinomja $(x-\lambda)^3$, $\dim(V_\lambda)=3$, ahol V_λ a λ sajátértékhez tartozó sajátaltér?

Megoldás: a) 6×6-os mátrix, amelynek csak 1 a sajátértéke, és a Jordan-normálalakjában a legnagyobb blokk 4×4-es, és összesen két Jordan-blokkja van, tehát a Jordan-normálalak egy 4×4-es és egy 2×2-es 1-blokkot tartalmaz.

b) Ez egy 7×7-es mátrix, amelynek egyetlen sajátértéke a λ, legnagyobb Jordan-blokkja 3×3-as, és összesen három Jordan-blokkja van. 7-nek két ilyen felbontása is van: $7=3+3+1$ vagy $7=3+2+2$, tehát kétféle Jordan-alak is lehetséges:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

8. *Mi az alábbi mátrixok Jordan-féle normálalakja?*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Az első mátrix diagonalizálható (már csak azért is, mert valós szimmetrikus). Mivel minden sorösszege 5, a mátrixnak sajátértéke az 5 az $(1,1,1,1,1)$ sajátvektorral. A mátrix rangja 1, ezért a 0 is sajátértéke 4-dimenziós sajátaltérrel. Így a mátrix diagonális (és akkor Jordán-féle) alakja $\operatorname{diag}(5,0,0,0,0)$.

A második mátrix sajátértékei 2 és -5, és a 2-höz tartozó sajátaltér csak 1-dimenziós, tehát a mátrix nem diagonalizálható, és így a Jordan-alakja

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

A harmadik mátrix egyetlen sajátértéke a 2, és $\dim V_2 = 1$, ezért a Jordan-normálalakja egyetlen blokkból áll:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

A negyedik mátrix ortogonális, tehát diagonalizálható. A karakterisztikus polinomja $-(x^3-1)$, ezért a sajátértékei $1,\varepsilon,\varepsilon^2$, ahol $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$. A Jordan-normálalakja $\operatorname{diag}(1,\varepsilon,\varepsilon^2)$.

9. *Hasonlóság erejéig hány olyan komplex mátrix van, melynek*

a) karakterisztikus polinomja $-(x-1)^3(x-3)^4$;

b) minimálpolinomja $(x+2)^6$, és sajátaltere 2-dimenziós?

Megoldás: a) A Jordan-normálalakban az 1-blokkok méretének megoszlása lehet 3, $2+1$ vagy $1+1+1$, a 3-blokkoké 4, $3+1$, $2+2$, $2+1+1$ vagy $1+1+1+1$. Ez összesen $3\cdot 5 = 15$ lehetőség.

b) A mimimálpolinomból következik, hogy a mátrix egyetlen sajátértéke -2, és a legnagyobb Jordan-blokkja 6×6-os. A sajátaltér dimenziója miatt pedig csak két Jordan-blokk lehet, így a kisebbiknek a mérete $1,2,3,4,5$ vagy 6 lehet, ez összesen 6 lehetőség.