

1. Bizonyítsuk be, hogy ha $A, B \in K^{n \times n}$ -re $AB = BA$, akkor A minden sajátaltérére B -invariáns.

Megoldás: Legyen $V_\lambda \leq K^n$ az A λ -hoz tartozó sajátaltérére. Ha $\mathbf{v} \in V_\lambda$, akkor $A(B\mathbf{v}) = (AB)\mathbf{v} = (BA)\mathbf{v} = B(A\mathbf{v}) = B\lambda\mathbf{v} = \lambda(B\mathbf{v})$, tehát $B\mathbf{v} \in V_\lambda$.

2. Mutassuk meg, hogy ha két 3×3 -as vagy 2×2 -es komplex mátrix karakterisztikus polinomja és minimálpolinomja megegyezik, akkor a két mátrix hasonló.

Megoldás: A karakterisztikus polinomban minden $(x - \lambda)$ gyöktényező kitevője legfeljebb $a = 3$, a minimálpolinomban ezért csak 1 , $a - 1$ vagy a lehet. A Jordan-normálalakban az első esetben minden λ -blokk 1×1 -es, a másodikban van egy $(a - 1) \times (a - 1)$ -es λ -blokk, és akkor azon kívül már csak egy 1×1 -es lehet, a harmadikban pedig egyetlen $a \times a$ -as λ -blokk van. Tehát ilyen méretű mátrixokra a karakterisztikus polinom és a minimálpolinom meghatározza a Jordan-normálalakot, így ezek között az azonos karakterisztikus és minimálpolinommal rendelkező mátrixok Jordan-normálalakja megegyezik, vagyis az ilyen mátrixok hasonlóak egymáshoz.

(4×4 -esre ez már nem igaz: például $k_A(x) = (x - 1)^4$ és $m_A(x) = (x - 1)^2$ a $2 + 2$ -es és a $2 + 1 + 1$ -es felbontású, 1 sajátértékhez tartozó Jordan-mátrixra is.)

3. Hasonlóság erejéig hány olyan 3×3 -as komplex mátrix van, amelynek a négyzete megegyezik a köbével?

Megoldás: Tegyük fel, hogy $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$, és $A^3 = A^2$. Ekkor A minimálpolinomja osztója az $x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$ polinomnak. Ebből következik, hogy A sajátértékei csak 0 vagy 1 lehetnek. Ha A diagonalizálható, akkor a Jordan-normálalakja diagonális, 1 -ekkel és/vagy 0 -kkal az átlóban. Mivel a hasonlósági osztályokban a Jordan-blokkok sorrendje változtatható, csak az számít, hogy hány 1 és hány 0 van az átlóban: ez négy lehetőség. Ha A nem diagonalizálható, akkor a minimálpolinomnak van többszörös gyöke, és ez az $m_A(x) \mid x^2(x - 1)$ miatt csak a 0 lehet. Tehát a minimálpolinom vagy x^2 , vagy $x^2(x - 1)$. Az első esetben a karakterisztikus polinom csak $-x^3$ lehet, és a Jordan-normálalak egy 2×2 -es és egy 1×1 -es 0 -blokkból áll, a másodikban a karakterisztikus polinom $-x^2(x - 1)$, és a Jordan-normálalak egy 2×2 -es 0 -blokkból és egy 1×1 -es 1 -blokkból áll. Tehát hasonlóság erejéig hat olyan mátrix van, amelynek a köbe megegyezik a négyzetével, és ezek Jordan-normálalakja

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Mi lehet az A^2 mátrix minimálpolinomja, ha $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ minimálpolinomja $(x + 1)^2$?

Megoldás: Ha $(A + I)^2 = O$, akkor $(A + I)^2(A - I)^2 = (A^2 - I)^2 = O$, így A^2 minimálpolinomja osztója az $(x - 1)^2$ polinomnak. Viszont $x - 1$ nem lehet, mert ha $A^2 - I = O$ lenne, akkor A minimálpolinomja osztója lenne $(x^2 - 1)$ -nek. Tehát A^2 minimálpolinomja $(x - 1)^2$.

Másképp: A Jordan-alakjában, $\mathcal{J}(A)$ -ban csak 2×2 -es és 1×1 -es -1 -blokkok vannak (és van legalább egy 2×2 -es). $\mathcal{J}(A)^2$ diagonális blokkjai $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ és $[1]$ alakúak, tehát 1 az egyetlen sajátértéke, és $(\mathcal{J}(A)^2 - I)$ -nek a négyzete O , de maga nem, tehát $\mathcal{J}(A)^2$ -nek és így a hozzá hasonló A^2 -nek is a minimálpolinomja $(x - 1)^2$.

5. Legyen A 10×10 -es valós mátrix! Jelölje r_i az A^i rangját! Lehet-e az (r_1, r_2, \dots) sorozat egyenlő az alábbiakkal?

a) $(5, 6, \dots)$;

b) $(9, 8, 7, \dots, 4, 4, \dots)$;

Megoldás: a) Ez a rangsorozat nem lehetséges, mert $\text{Im } A^{k+1} \leq \text{Im } A^k$ minden k -ra, tehát a rangoknak is csökkenniük kellene, itt viszont az 5 után 6 következik.

b) Ilyen rangsorozatot kaphatunk, ha egy olyan Jordan-mátrixot veszünk, amelynek egyetlen 0 -blokkja van, így ennek a hatványozásánál mindig 1 -gyel csökken a rang, amíg 0 -vá nem válik a blokk. Ez a rangsorozat szerint akkor következik be, amikor a rang 4 , ezért a 0 -blokk 6×6 -os. Ezt a 0 -blokkot kiegészíthetjük tetszőleges invertálható diagonális blokkal, például egy 4×4 -es egységmátrixszal.

6. Egy 10×10 -es A mátrix sajátértékei $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Az $A - \lambda_1 I$ hatványainak rangja rendre 8, 6, 5, 4, 4. Az $A - \lambda_2 I$ hatványainak rangja rendre 7, 6, 6. Írjuk fel A Jordan-féle normálalakját!

Megoldás: Írjuk fel egy táblázatba a rangok sorozatát (a nulladik hatvánnyal, tehát az egységmátrixszal kezdve). Ekkor a második differenciasorozat adja meg az adott sajátértékhez tartozó adott méretű Jordan-blokkok számát.

k	0	1	2	3	4	5
$r((A - I)^k)$	10	8	6	5	4	4
d_k		2	2	1	1	0
n_k		0	1	0	1	

k	0	1	2	3
$r((A - 2I)^k)$	10	7	6	6
d_k		3	1	0
n_k		2	1	

Tehát a Jordan-alakban egy 4×4 -es és egy 2×2 -es 1-blokk, és egy 2×2 -es és két 1×1 -es 2-blokk van. Azaz $\mathcal{J}(A) = \text{diag}(J_1, J_2, J_3, J_4, J_5)$, ahol

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad J_4 = [2], \quad J_5 = [2]$$

7. Bizonyítsuk be, hogy ha $K \leq L$ végtelen testek, és $A, B \in K^{n \times n}$ hasonlók mint L fölötti mátrixok, akkor $K^{n \times n}$ -ben is hasonlók!

Megoldás: A és B akkor hasonlók, ha van olyan P invertálható mátrix, amelyre $P^{-1}AP = B$, azaz $AP = PB$. Ez a P n^2 darab ismeretlen elemére egy lineáris egyenletrendszer, amelynek általános megoldása valahány K -beli vektor (valójában mátrix) paraméter-együtthetős lineáris kombinációja. A feltétel, hogy P invertálható, azt jelenti, hogy $|P| \neq 0$. P determinánsa a paramétereknek K fölötti többváltozós polinomja. Azt kell tehát belátnunk, hogy ha ennek a polinomnak van olyan L -beli behelyettesítési értéke, ami nem 0, akkor a paraméterekbe alkalmas K -beli elemeket is be tudunk helyettesíteni úgy, hogy az értéke ne legyen 0.

Legyen $f(x_1, \dots, x_k) \in K[x]$, és tegyük fel, hogy valamely $a_1, \dots, a_k \in L$ elemekre $f(a_1, \dots, a_k) \neq 0$. A változók számára vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy ekkor van olyan $b_1, \dots, b_k \in K$, hogy $f(b_1, \dots, b_k) \neq 0$. $n = 1$ -re igaz: egy m fokú egyváltozós nemnulla polinomnak legfeljebb m gyöke lehet, és K végtelen. Tegyük fel, hogy $(k - 1)$ -változós polinomra igaz az állítás. f -et felírhatjuk x_k -nak $K[x_1, \dots, x_{k-1}]$ fölötti polinomjaként, amelynek nem minden együtthetősége azonosan nulla L fölött, mert akkor L fölött sem lenne nemnulla behelyettesítés. Tehát valamelyik együtthetőségen az indukciós feltevés szerint van (b_1, \dots, b_{k-1}) -gyel való K -beli nemnulla értékű behelyettesítése. Tekintsük a $g(x_k) = f(b_1, \dots, b_{k-1}, x_k)$ egyváltozós polinomot. Mivel ez nem az azonosan nulla polinom, csak véges sok gyöke lehet K fölött is, és így van olyan $b_k \in K$, amelyre $f(b_1, \dots, b_k) = g(b_k) \neq 0$.

Megj.: Véges testekre is igaz az állítás, csak ez a bizonyítás arra az esetre nem működik.

8. Bizonyítsuk be, hogy minden négyzetes mátrix hasonló a transzponáltjához!

Megoldás: Legyen $A \in K^{n \times n}$, és $L \geq K$ egy bővebb test, amelyben $k_A(x)$ lineáris faktorokra bontható. Ekkor L -ben van A -nak Jordan-normálalakja. Az előző feladat szerint elég belátni, hogy $A \sim A^T$ az L fölött. Legyen $A \sim J = \text{diag}(J_1, \dots, J_k)$ az A Jordan-normálalakja a $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} \mathcal{B}_k$ bázisra való áttéréssel. Legyen \mathcal{B}'_i a \mathcal{B}_i fordított sorrendben. Ekkor az A mátrix a $\mathcal{B}' = \mathcal{B}'_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} \mathcal{B}'_k$ bázisban J^T , tehát $J^T \sim J$. Legyen $A = PJP^{-1}$ és $J^T = QJQ^{-1}$. Ekkor $A^T = (P^{-1})^T J^T P^T = (P^{-1})^T QJQ^{-1} P^T = (Q^{-1} P^T)^{-1} J (Q^{-1} P^T) \sim J \sim A$.

9. Határozzuk meg az alábbi mátrixok Jordan-féle normálalakját, és adjuk meg egy Jordan-bázisát!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Megoldás: $k_A(x) = (x-2)^2(x-1)^2$.

$r(A-2I) = 3 \Rightarrow \dim V_2 = 4-3 = 1 \Rightarrow \mathcal{J}(A)$ -ban egy 2-blokk van, és így ez 2×2 -es.

$r(A-I) = 2 \Rightarrow \dim V_1 = 4-2 = 2 \Rightarrow \mathcal{J}(A)$ -ban két 1-blokk van, és így ezek 1×1 -esek. Tehát

$$\mathcal{J}(A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A $\lambda = 2$ -höz egyetlen 2 hosszúságú Jordan-láncot kell keresnünk, mert egyetlen 2×2 -es Jordan-blokk van. Először $(A - \lambda I)^i$ magterének, K_i -nek a bázisát kell megtalálnunk (most $i = 1, 2$ -re). Aztán az i csökkenő rendjében (az alábbiakban jobbról balra) a K_i bázisából a jobbról érkező Jordan-láncok K_i -beli elemei és a K_{i-1} báziselemei által generált altérhez kiegészítő báziselemeket választani (ezt bonyolultabb esetben Gauss-eliminációval végezhetnénk).

A K_i magtér meghatározásához $(A - \lambda I)^i$ redukált lépcsős alakjára van szükségünk: L_i . Ezután az $(A - \lambda I)^{i+1}$ redukálásához elég az $L_i(A - \lambda I)$ alakból kiindulnunk, mert ha $L_i = P(A - \lambda I)^i$ valamely invertálható P -re, akkor az $L_i(A - \lambda I) = P(A - \lambda I)^{i+1}$ mátrixot is megkaphatjuk az $(A - \lambda I)^{i+1}$ mátrixból ugyanazokkal az elemi sorműveletekkel. Az egyenletrendszerből kihagyhatjuk a $\mathbf{0}$ sorokat, s mivel ezek a jobbról szorzásnál továbbra is $\mathbf{0}$ sorokba mennének, ez nem változtat a későbbi egyenletrendszerek megoldásán. (A Jordan-láncok előállításához nem kell előre meghatározni a Jordan-normálalakot: addig folytatjuk a hatványozást, amíg még csökken a mátrix rangja, vagy egyszerűbben, amíg a magtér dimenziója, azaz $n - (\text{a rang})$ el nem éri a λ algebrai multiplicitását.

$$A-2I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(A-2I)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_1 : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad K_2 : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jordan-lánc(ok) $\lambda = 2$ -höz:

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xleftarrow{(A-2I)} \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A $\lambda = 1$ -hez tartozó általánosított sajátvektorok mind sajátvektorok, tehát a Jordan-láncok itt 1-eleműek, a V_1 bázisát kell csak meghatározni.

$$A - I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tehát a Jordan-bázis a fenti vektorokból $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4\}$.

B egyetlen sajátértéke a 3.

$$B-3I = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot(B-3I)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_1 : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad K_2 : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jordan-lánc(ok) $\lambda = 3$ -hoz:

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xleftarrow{(B-3I)\cdot} \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \xleftarrow{(B-3I)\cdot} \mathbf{b}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A Jordan-bázis a fent kapott $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4\}$, és a Jordan-normálalak két 2×2 -es 3-blokkból áll:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$