

NÉV _____

NEPTUNKÓD _____

Bevezetés az algebra 2

1. vizsga – elmélet

2022-06-01

A tesztkérdésekre 20, a definíciók, tételek precíz megfogalmazására 10, a bizonyításos részre 10 pont kapható. A válaszokat írjuk a kérdéshez tartozó üres dobozba! Kidolgozási idő 60 perc. Segédeszköz nem használható!

1. Mindegyik állításról állapítsuk meg, hogy igaz vagy hamis (I|H)! (6 pont)

- a) Ha $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ nem diagonalizálható, akkor $k_A(x)$ -nek van többszörös gyöke.
- b) Ha $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, és $k_A(x)$ -nek van többszörös gyöke, akkor A nem diagonalizálható.
- c) Ha $A \neq 0$ valós szimmetrikus mátrix, és A nyoma 0, akkor A indefinit.
- d) Ha φ hermitikus bilineáris függvény, akkor $\varphi(ix, y) = \varphi(-x, iy)$.
- e) Ha $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ normális, akkor A önadjungált, ferdén önadjungált vagy unitér.
- f) $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitér mátrixra az A^k sorozat csak akkor konvergens, ha $A = I$.

2. Legyen V vektortér, és $\mathbf{v} \in H \subseteq V$. Nyilakkal jelezzük, melyik állításból következik valamelyik másik az alábbiak közül!

- A: H független
- B: $H \setminus \{\mathbf{v}\}$ független
- C: $\mathbf{v} \notin \text{span}(H \setminus \{\mathbf{v}\})$

		B	
	A		C

3. Mi a karakterisztikus polinomja és mi a minimálpolinomja \mathbb{R}^3 -ben egy hipersíkra való tükrözés mátrixának?

$k(x) =$
$m(x) =$

4. Mi egy komplex bilineáris függvény Gram-mátrixa egy \mathcal{B} bázisban, ha a standard bázisban A a Gram-mátrixa, és $P = [id]_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}$ az áttérés mátrixa?

--

5. Ha egy 4 csúcsú páros gráfnak sajátértéke a 2 és a 0, akkor mi a gráf spektruma multiplicitásokkal?

--

6. Ha $A = U\Sigma V^*$ teljes SVD-felbontás, ahol $\Sigma = \text{diag}(3, 2, 2)$, akkor mivel egyenlő $\|A\|_2$ és $\|A^{-1}\|_2$?

--

7. Milyen (esetleg elfajuló) kúpszeletet ír le az $f(x, y) = 0$ másodfokú egyenlet, ha a homogén másodfokú része indefinit kvadratikus alak?

--

8. Mi az A^*A mátrix rangja, ha

$$A = \begin{bmatrix} i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1+i \end{bmatrix} ?$$

--

9. Definiáljuk egy sajátérték algebrai és geometriai multiplicitását! Adjunk példát olyan mátrixra és sajátértékre, amelynél ez a két multiplicitás különbözik! (3 pont)

10. Definiáljuk egy mátrix szinguláris értékeit! (2 pont)

11. Mondjuk ki azt a tételt, amely egy mátrixnak a minimálpolinom bizonyos faktora szerinti felbonthatóságáról szól! (3 pont)

12. Írjuk fel a háromszög-egyenlőtlenséget valós euklideszi térben. Milyen feltétel mellett van ebben egyenlőség? (2 pont)

13. Mondjuk ki és bizonyítsuk be azt a tételt, amely lineáris egyenletrendszerek optimális közelítő megoldására ad módszert a QR-felbontás segítségével! (5 pont)

14. Annak a bizonyításához, hogy minden vektortérnek van bázisa, a Zorn-lemmát alkalmaztuk a V vektortér független részhalmazaiából álló \mathcal{H} halmazra.

a) Milyen feltételt kell kielégítenie \mathcal{H} -nak a Zorn-lemma szerint, hogy létezzen maximális független részhalmaz V -ben?

b) Lássuk be, hogy ez a feltétel teljesül \mathcal{H} -ra! (5 pont)