E	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

NÉV ______________________________ **NEPTUNKÓD** __________

Bevezetés az algebrába 2 **1. vizsga – gyakorlat** **2022-06-01**

Minden kérdésre írjuk a válaszokat a mellette lévő dobozba. Az első nyolc feladat mindegyike 2 pontot, a továbbiak 8 pontot érnek. A nyolcpontos feladatok megoldását részletesen is írjuk le, külön lapon. Kidolgozási idő 110 perc.

E1. A CSB-egyenlőtlenség használatával adjunk felső korlátot a $|2x - 3y + 6z|$ értékre, ha $|(x, y, z)| = 2$.

E2. Mi lehet az $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ mátrix 0-hoz tartozó sajátalterének dimenziója, ha a minimálpolinomja $m_A(x) = x^2$?

E3. Mi lesz az $A = [f]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ mátrixból, ha a $\mathcal{C}$ bázis első és utolsó elemét megcseréljük?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

E4. Mi annak a mátrixnak a pszeudoinverze, amelynek a redukált SVD-felbontása

$$\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ ?$$

E5. Adjuk meg annak a Givens-forgatásnak a mátrixát, amely az $(1, 1, 1, 1)$ vektort az $(1, \sqrt{2}, 1, 0)$ vektorba viszi!

E6. Mi az $A \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ mátrix Jordan-normálalakja, ha $(A - 2I)^k$ rangja $k = 1, 2, 3$-ra rendre $3,\ 1,\ 0$?

E7. Mi a $q(x, y) = 2x\bar{x} + 2\mathrm{i}x\bar{y} - 2\mathrm{i}\bar{x}y - y\bar{y}$ kvadratikus alak jellege?

E8. Milyen alakban írható az $x_n = x_{n-1} + 6x_{n-2}$ rekurzív sorozat n-edik tagja?

---

1. Írjuk fel az alábbi A mátrix diagonális alakját és az $A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$ spektrálfelbontását!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

2. A $c \in \mathbb{R}$ milyen értékeire diagonalizálható az $A = \begin{bmatrix} 4 & c \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ mátrix $\mathbb{R}$ fölött, és melyekre diagonalizálható ortogonálisan?

3. Legyen $\mathcal{B} = \{(2,1),(3,2)\}$ az $\mathbb{R}^2$ egy bázisa, és

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Írjuk fel az $f: \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ lineáris transzformáció, és a $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{y}$ bilineáris függvény mátrixát a $\mathcal{B}$ bázisban!

4. Számítsuk ki (Gram–Schmidt-ortogonalizálással) az A mátrix redukált QR-felbontását.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

5. Tekintsük a $q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xy + 2yz$ kvadratikus alakot. Írjuk fel a kvadratikus alak A mátrixát, hozzuk diagonális alakra, és állapítsuk meg q jellegét. Adjuk meg az ehhez a diagonális alakhoz tartozó bázist is!

6. Határozzuk meg az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrix teljes SVD-felbontását!

7. Hermit-interpolációval keressünk olyan $p(x)$ polinomot, amelyre $\sqrt{A} = p(A)$, ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(A $p(A)$ mátrixot nem kell kiszámolni.)

8. Adjuk meg az alábbi A mátrix Jordan-normálalakját, és egy ehhez tartozó Jordan-bázist.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$