1. Mutassuk meg, hogy az alábbiak vektorterek! Hány dimenziósak? Adjunk meg bennük bázist!

a) $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$
b) $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}$
c) Az $n \times n$-es valós nulla nyomú mátrixok $\mathbb{R}$ fölött. (Egy mátrix nyoma a diagonális elemeinek az összege.)
d) Az $n \times n$-es komplex nulla nyomú mátrixok $\mathbb{R}$ fölött.
e) Az $\mathbb{R}[x, y]$ $\mathbb{R}$-vektortérben a legföljebb 3-adfokú polinomok.
f) Az $\mathbb{R}[x, y]$ $\mathbb{R}$-vektortérben a legföljebb 3-adfokú szimmetrikus polinomok
g) Adott $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ mátrixszal felcserélhető 2×2-es valós mátrixok.

2. Bizonyítsuk be az axiómákból, hogy egy vektortérben $\lambda\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ vagy $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

3. Tekintsük az X halmaz $\mathcal{P}(X)$ hatványhalmazán értelmezett $K = \mathbb{Z}_2$ fölötti V vektorteret, ahol az összeadás az $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ szimmetrikus differencia.

a) Bizonyítsuk be, hogy V valóban vektortér!
b) Adjunk meg V-ben egy bázist, ha X véges halmaz!
c) Bizonyítsuk be, hogy (végtelen X halmaz esetén is) van olyan $f : V_K \to K_K$ lineáris leképezés, amely X páros elemszámú véges részhalmazait 0-ba, a páratlanokat 1-be viszi!

4. Adjuk meg az $f : (x, y, z) \to (x+y-2z, x+z, 2x+y-z, -x-z)$ lineáris leképezés márixát standard bázisban. Mennyi a rangja? Hány dimenziós f magtere és képtere? Adjuk meg a magtérnek és a képtérnek egy-egy bázisát!

5. Legyen $f : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ az a leképezés, amelyre $f : p(x) \mapsto (x-1)p'(x^2+1)$. Bizonyítsuk be, hogy f lineáris leképezés, és határozzuk meg a magját és a rangját! Írjuk fel a mátrixát a standard $\{1, x, x^2, \dots\}$ bázisokból álló bázispárban, illetve keressünk egy olyan bázispárt, amelyben a mátrixa $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ alakú blokkmátrix!

6. Adjuk meg a következő lineáris transzformációk és leképezések mátrixát a megadott bázisban (vagy bázispárban)!
Adjuk meg a képtér és a magtér egy-egy bázisát!

a) $f(x, y, z) = (x + 2y - z, x - y + z)$ standard bázisban, illetve a $(\mathcal{B}', \mathcal{C}')$ bázispárban, ahol
a $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ és $\mathcal{C}' = \{(1, 1), (2, 3)\}$.
b) az $x = t, y = 2t, z = -t$ tengely körüli $90°$-os forgatás a standard bázisban!
c) a 2×2-es valós mátrixokon az $A \mapsto A + A^T$ leképezés a standard bázisban!
d) A $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ vektortéren egy $z = a + bi$ komplex számmal való szorzás mátrixát a $\mathcal{B} = \{1, i\}$ és a $\mathcal{B}' = \{1 + i, 1 - i\}$ bázisban.

7. Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ az a lineáris transzformáció, melyre $f(1, 1, 0) = (1, 0, 1)$, $f(1, 0, 1) = (0, 1, 1)$ és $f(0, 1, 1) = (1, 1, 0)$. Adjuk meg f mátrixát a $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ bázisban és a standard bázisban is! Milyen vektorokat hagy helyben ez a leképezés? Mi az f mint geometriai transzformáció?

Házi feladatok

Beadási határidő: március 6.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást adjunk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni. Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Mutassuk meg, hogy azok a 3×3-as valós mátrixok, melyekben minden sor összege 0, vektorteret alkotnak $\mathbb{R}$ fölött. Hány dimenziós ez a vektortér? Adjunk meg benne egy bázist (lássuk is be, hogy bázis)!

2. Bizonyítsuk be vektorterekben az $\mathbf{u} - (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = (\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ azonosságot, ahol a kivonás definíciója (K) $\mathbf{u} - \mathbf{v} := \mathbf{u} + (-1)\mathbf{v}$. Egy lépésben csak egy átalakítást végezzünk, és mindig írjuk oda, hogy melyiket használjuk az alább felsorolt (A1),...,(A4),(S1),...,(S4) axiómák közül, illetve a (K) definícót vagy egy (T) testtulajdonságot!

(A1) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$
(A2) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$
(A3) $\exists \mathbf{0} : \ \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in V$
(A4) $\forall \mathbf{v} \in V \ \exists (-\mathbf{v}) : \quad \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$
(S1) $\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v} \quad \forall \lambda \in K, \ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$
(S2) $(\lambda + \mu)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v} \quad \forall \lambda, \mu \in K, \ \mathbf{v} \in V$
(S3) $(\lambda\mu)\mathbf{v} = \lambda(\mu\mathbf{v}) \quad \forall \lambda, \mu \in K, \ \mathbf{v} \in V$
(S4) $1\mathbf{v} = \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in V$

3. Bizonyítsuk be a Zorn-lemma segítségével, hogy ha $\mathbf{v}$ egy V vektortér nemnulla vektora, akkor van V-nek maximális olyan W altere, amely nem tartalmazza $\mathbf{v}$-t.

4. Adjuk meg az $f : (x, y, z) \to (x + 2y - z, x + y, y - z)$ lineáris transzformáció márixát a standard bázisban. Mennyi f rangja? Hány dimenziós f magtere és képtere? Adjuk meg a magtérnek és a képtérnek egy-egy bázisát!

5. Legyen : $\mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ az a lineáris transzformáció, amelyre $f(p(x)) = xp'(x) - p(x)$. Adjuk meg f mátrixát a standard $\{ 1, x, x^2 \}$ bázisban, és írjuk fel f magterének bázisát (a bázis elemeit polinomokként írjuk fel)!

6. Adjuk meg az $f(x, y, z) = (x + y + z, x - 2y + z)$ lineáris leképezés mátrixát a standard bázisban, illetve a $\mathcal{B}'_1 = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, -1)\}$ és $\mathcal{B}'_2 = \{(1, -1), (1, 1)\}$ bázispárban!

7*. Bizonyítsuk be, hogy a vektortereknek a 2. feladatban felsorolt (A1),...,(A4),(S1),...,(S4) axiómái közül az (A1) kommutativitási axióma következik a többiből! Figyeljünk oda arra, hogy (A3) és (A4) csak "féloldalasan" lett kimondva, tehát ha szükségünk van a másik oldali azonosságra, azt bizonyítanunk kell az (A1) felhasználása nélkül!