

1. Határozzuk meg a spektrumát annak az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak, amelynek minden eleme 1. Diagonalizálható-e ez a mátrix, és ha igen, mi a diagonális alakja?
2. Melyek diagonalizálhatók az alábbi mátrixok közül \mathbb{R} , illetve \mathbb{C} fölött?

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Határozzuk meg az alábbi mátrix spektrálfelbontását és ennek segítségével a 12-edik hatványát!

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

4. Mutassuk meg a karakterisztikus egyenlet felírása nélkül, hogy az alábbi A mátrixnak van legalább két valós sajátértéke! (Használjuk a Gersgorin-köröket!)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

5. Adjuk meg az alábbi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ vektorok által kifeszített térnek egy ortonormált bázisát a standard skalárszorzatra nézve Gram-Schmidt-ortogonalizációval!

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0, -1), \quad \mathbf{v}_2 = (1, -1, 0, 1), \quad \mathbf{v}_3 = (1, 3, 1, -1)$$

6. Tekintsük az $(1, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 0)$ által kifeszített W alteret $V = \mathbb{Z}_2^4$ vektortérben.
 - a) Mutassuk meg, hogy W^\perp nem direkt kiegészítője W -nek.
 - b) Válasszunk ki a \mathbb{Z}_2^4 standard $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ bázisából két elemet, amelyek W -nek valamelyik direkt kiegészítőjét feszítik ki!
7. Tekintsük az \mathbb{R}^2 -et mint euklideszi teret az $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ mátrix által megadott $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_A := \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ skalárszorzattal. Legyen $\mathbf{u} = (1, 1), \mathbf{v} = (1, -1)$.
 - a) Mi lesz az $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle_A$ és $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_A$, skalárszorzatok értéke, és mi az \mathbf{e}_1 és \mathbf{e}_2 hossza ebben az euklideszi térben?
 - b) Adjunk meg erre a skalárszorzatra nézve ortonormált bázist \mathbb{R}^2 -ben!

Házi feladatok

Beadási határidő: március 20.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni. Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Az alábbi mátrix két elemét nem ismerjük, de tudjuk, hogy egyik sajátértéke 3. Mi a másik két sajátértéke?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ * & * & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Adjunk meg olyan 2×2 -es A mátrixot, amelyre $A^4 = A^2 \neq A$, és A -nak egyetlen eleme sem 0. (Útmutatás: keressünk a $D^4 = D^2 \neq D$ tulajdonságot kielégítő diagonális D mátrixot, és konjugáljuk el alkalmas P -vel.)

3. Határozzuk meg az alábbi mátrix spektrálfelbontását, és ennek segítségével számítsuk ki a mátrix 10-edik hatványát!

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Az alábbi A mátrixnak mátrixnak van tiszta képzetes sajátértéke. Adjunk ennek abszolút értékére becslést a Gersgorin-körök segítségével!

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 - i \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & i \end{bmatrix}$$

5. Adjuk meg az alábbi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ vektorok által kifeszített térnek egy ortonormált bázisát a standard skalárszorzatra nézve Gram-Schmidt-ortogonalizációval!

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 2, 1, 2), \quad \mathbf{v}_3 = (1, 2, 3, 6).$$

Számítsuk ki a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ vektorok koordinátavektorait erre az ortonormált bázisra nézve!

6. Igazoljuk, hogy $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 0, 1, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (0, 0, 1, -1)$, $\mathbf{a}_4 = (0, -1, 0, 0)$ vektorok ortogonális bázist alkotnak az \mathbb{R}^4 standard euklideszi térben. Legyen $W := \text{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3)$. Számítsuk ki az $\mathbf{x} = (1, 3, 0, 2)$ vektor W -re való merőleges vetületét, és bontsuk az \mathbf{x} vektort egy W -beli és egy W^\perp -beli komponens összegére!
- 7*. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $n \times n$ -es A, B mátrixokra AB -nek és BA -nak ugyanazok a sajátértékei, és a nemnulla sajátértékeknek ugyanakkora a geometriai multiplicitása is, de a nullának nem feltétlenül.