**1.** Mutassuk meg, hogy az $n \times n$-es ortogonális mátrixok csoportot alkotnak, azaz ortogonális mátrixok szorzata ortogonális, inverze ortogonális és az egységmátrix ortogonális.

**2.** Melyik szemiortogonális az alábbi mátrixok közül? A szemiortogonálisoknak melyik oldali inverze létezik? Adjuk is meg a megfelelő egyoldali inverzeket!

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**3.** Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$. Határozzuk meg az $A$ mátrix QR-felbontását, valamint teljes QR-felbontását Gram–Schmidt-féle ortogonalizációval!

**4.**
a) Írjuk fel azt a $2 \times 2$-es forgatásmátrixot, amely az $(1,2)$ vektort elforgatja a $(\sqrt{5}, 0)$ vektorba!
b) Írjuk fel a $\mathbf{v} = (1,-1,1,-1)$ normálvektorú hipersíkra való Householder-tükrözés standard mátrixát!
c) Írjuk fel annak a Householder-tükrözésnek a mátrixát, amely a $v = (1,-1,1,-1)$ vektort olyan vektorba viszi, amelynek csak az első koordinátája nem nulla, és az első koordináta negatív! Milyen normálvektorú hipersíkra tükröz ez a transzformáció?

**5.** Határozzuk meg az $A = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 7 \\ 3 & 10 & 1 \\ 0 & -12 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix QR-felbontását Givens-forgatások segítségével!

**6.** Határozzuk meg az $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ mátrix QR-felbontását Householder-tükrözések segítségével!

**7.** Tekintsük a 3. feladatbeli $A$ mátrixot. Határozzuk meg az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer egyetlen optimális közelítő megoldását QR-felbontás segítségével, ha $\mathbf{b} = (0,0,0,1)$. Miért van csak egy optimális közelítő megoldás?

## Házi feladatok

Beadási határidő: március 27.

*A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni. Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!*

**1.** Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbb{R}^{n\times n}$ valós vektortéren skalárszorzat az $\langle A, B\rangle = \sum_{i,j} a_{ij}b_{ij}$, és a transzponálás ortogonális transzformáció ezen az euklideszi téren. Mi ebben a térben a szimmetrikus mátrixok által alkotott altér merőlegese?

**2.** a) Írjuk fel azt a $2\times 2$-es forgatásmátrixot, amely a $(2,-1)$ vektort elforgatja a $(\sqrt{5}, 0)$ vektorba!

b) Adjuk meg azt a Householder-tükrözést, amely a $\mathbf{v} = (1,1,1,1)$ vektort olyan vektorba viszi, amelynek csak az első koordinátája nem nulla és az első koordináta pozitív.

**3.** Határozzuk meg az $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix QR-felbontását Householder-tükrözések segítségével!

**4.** Határozzuk meg az $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -6 \\ 1 & -2 & -8 \end{bmatrix}$ mátrix QR-felbontását és teljes QR-felbontását Gram–Schmidt-féle ortogonalizációval!

**5.** Határozzuk meg az $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ mátrix QR-felbontását Givens-forgatások segítségével!

**6.** Tekintsük a 4. feladatbeli $A$ mátrixot. Határozzuk meg az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer optimális közelítő megoldását QR-felbontás segítségével, ha $\mathbf{b} = (4,0,0,0)$.

**7*.** Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbb{R}^n$ bármely merőlegességtartó lineáris transzformációja (azaz olyan $f$ lin. tr., amelyre $\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Rightarrow f(\mathbf{u}) \perp f(\mathbf{v})$) egy ortogonális transzformáció skalárszorosa.