1. Bizonyítsuk be, hogy egy $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix pontosan akkor ferdén önadjungált, ha iA önadjungált.

2. Bizonyítsuk be, hogy normális mátrix különböző sajátértékeihez tartozó sajátalterei merőlegesek egymásra, pontosabban

a) $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ pontosan akkor normális, ha $\mathbb{C}^n$ az A sajátaltereinek ortogonális direkt összege (azaz a komponensek páronként merőlegesek egymásra);

b) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pontosan akkor szimmetrikus, ha $\mathbb{R}^n$ az A sajátaltereinek ortogonális direkt összege

3. Az alábbiak közül melyik mátrix hozható valós vagy komplex diagonális alakra? Lehet-e a diagonalizáló mátrix unitér/ortogonális?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{bmatrix}$$

4. Milyen kúpszeletet írnak le az alábbi egyenletek? Változtassuk meg a koordinátarendszert úgy, hogy az egyenletek $a(x')^2 + b(y')^2 = c$ alakúak legyenek!

a) $x^2 - 4xy + y^2 + 6y - 2 = 0$

b) $xy = 1$

5. Hozzuk diagonális alakra az $x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$ kvadratikus alakot! Adjunk meg egy bázist, amelyben diagonális alakú!

6. Hozzuk kanonikus alakra az $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$ egyenletű másodrendű görbe egyenletét és ábrázoljuk a görbét és az új koordinátarendszer tengelyeit az eredeti koordinátarendszerben!

Házi feladatok

Beadási határidő: április 17.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni. Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Bizonyítsuk be, hogy normális mátrixnak (komplex) skalárszorosa, hatványa, és inverze (ha van) normális, de normális mátrixok szorzata lehet nem normális (adjunk ellenpéldát)!

2. $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ szimmetrikus mátrix, $k_A(x) = -(x-1)(x-2)^2$, és $(1,1,0)$ az A-nak a $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektora. Adjunk meg $\mathbb{R}$-ben az A sajátvektoraiból álló ortonormált bázist, és ennek segítségével határozzuk meg az A mátrixot. (Felhasználhatjuk a 2. gyakorló feladat állítását.)

3. Tegyük fel, hogy az $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix normális, az A mátrixot pedig úgy kaptuk N-ből, hogy az i. sorát, majd az i. oszlopát megszoroztuk -1-gyel (tehát az ii indexű eleme nem változott). Bizonyítsuk be, hogy A is normális! (Útmutatás: hogyan kaphatjuk meg N-et A-ból mátrixszorzással?)

4. Az alábbiak közül melyik mátrix hozható valós, illetve komplex diagonális alakra? Lehet-e a diagonalizáló mátrix unitér/ortogonális?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Hozzuk diagonális alakra a $2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$ kvadratikus alakot! Adjunk meg egy bázist, amelyben diagonális alakú!

6. Hozzuk kanonikus alakra az $9x^2 - 24xy + 16y^2 + 10x + 20y + 29 = 0$ egyenletű másodrendű görbe egyenletét és ábrázoljuk a görbét és az új koordinátarendszer tengelyeit az eredeti koordinátarendszerben!

7*. Legyen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ egy önadjungált mátrix. Bizonyítsuk be, hogy az $A, A^2, A^3, \ldots$ mátrixok vagy mind különbözőek, vagy legfeljebb két különböző van köztük!