1. Keressük meg azt a mátrixot, mely a definíció alapján igazolja, hogy az alábbi két mátrix kongruens, azaz olyan invertálható P mátrixot, amelyre $B = P^T AP$, ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Adjunk példát olyan $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixokra, amelyekre
a) $A \cong B$, de $A \not\sim B$;
b) $A \sim B$, de $A \not\cong B$.

3. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{R}^{n\times n}$-ben
a) a kongruencia megőrzi a mátrix rangját és a determináns előjelét;
b) ha $A \cong B$, akkor az $\mathbf{x}^T A\mathbf{y}$ és $\mathbf{x}^T B\mathbf{y}$ bilineáris függvényekhez tartozó kvadratikus alakok mátrixa is kongruens.

4. Milyen feltétel mellett lesz az alábbi valós mátrix pozitív, illetve negatív definit? Milyen jellege lehet még a mátrixnak más a értékekre?

$$A = \begin{bmatrix} a & 2 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

5. a) Bizonyítsuk be, hogy $x^4 + 5x^3 + x + 6$ nem lehet egy valós szimmetrikus mátrix karakterisztikus polinomja.
b) Egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix karakterisztikus polinomja $k_A(x) = -(x^3+2x^2-10x+6)$. A Descartes-féle előjelszabály segítségével állapítsuk meg a mátrix jellegét!

6. Bizonyítsuk be, hogy egy pozitív szemidefinit és egy pozitív definit mátrix összege mindig pozitív definit.

7. Tekintsük a $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T B\mathbf{y}$ valós bilineáris függvényt, ahol $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
a) Határozzuk meg, a hozzá tartozó kvadratikus alak mátrixát és jellegét!
b) Adjunk meg $\mathbb{R}^2$-ben olyan bázist, amelyben a kvardatikus alak négyzetösszeg, és írjuk fel ebben a bázisban a kvadratikus alakot!

8. Határozzuk meg az alábbi A mátrix pozitív (szemi)definit négyzetgyökét.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

9. Lássuk be, hogy az alábbi A mátrix nem kongruens semelyik valós diagonális mátrixszal, de alsó (és felső) háromszögmátrixszal kongruens. Lehet-e az utóbbinál az áttérés mátrixa ortogonális?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Házi feladatok

Beadási határidő: április 24.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni. Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Határozzuk meg az alábbi szimmetrikus mátrixok jellegét:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

2. Adjunk meg olyan bázist $\mathbb{R}^3$-ben, amelyre az előző feladat B mátrixához tartozó $\mathbf{x}^T B\mathbf{x}$ kvadratikus alak mátrixa olyan diagonális mátrix, amelynek csak 0 és ± 1 elemei vannak!

3. Használjuk a Descartes-féle előjelszabályt az alábbi kérdések megválaszolásához!

a) Hány pozitív és hány negatív valós gyöke lehet az $f(x) = x^5 - x^4 - 2x^2 + 5$ polinomnak a Descartes-féle előjelszabály szerint?

b) Hány pozitív és hány negatív sajátértéke van annak a valós szimmetrikus mátrixnak, amelynek karakterisztikus polinomja $k(x) = x^4 - 5x^2 + x + 1$?

4. Hozzuk diagonális alakra a $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2 + 8x_2x_3$ kvadratikus alakot, és határozzuk meg a jellegét! Adjunk meg egy bázist (nem feltétlenül ortogonálist), amelyben a kvadratikus alak diagonális alakú!

5. Adjuk meg az $A = \begin{bmatrix} 18 & 6 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ mátrixhoz azt a pozitív szemidefinit B mátrixot, amelyre $B^2 = A$.

6. Adjuk meg az alábbi mátrix Cholesky-felbontását!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

7*. a) Bizonyítsuk be, hogy az 5. feladat A mátrixának minden négyzetgyöke szimmetrikus, sőt, csak a feladat megoldásában szereplő B és $-B$ az A négyzetgyökei!

b) Adjunk példát olyan szimmetrikus, nem nulla mátrixra, amelynek van nem szimmetrikus négyzetgyöke is $\mathbb{R}^{2\times 2}$-ben!