1. Bizonyítsuk be, hogy ha egy szimmetrikus mátrix nem indefinit, lehet csupán lefelé ható sorműveletekkel felső háromszög alakra hozni (ahogy az LU-felbontásban), és az így kapott háromszögmátrix diagonális része kongruens az eredeti mátrixszal (tehát meghatározza a jellegét).

2. Határozzuk meg a $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{y}$ valós bilineáris függvényre nézve a $W = \mathrm{span}((1,1,0),(0,2,1))$ altér jobb és bal oldali merőlegesét, ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Legyen egy φ komplex skalárszorzat (azaz pozitív definit hermitikus bilin. fv.) Gram–mátrixa az $\mathcal{E} = \{\,\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\,\}$ standard bázisban $\begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$.

a) Számítsuk ki $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ hosszát és skaláris szorzatát a $(\mathbb{C}^2, \varphi)$ euklideszi térben.

b) Adjunk meg egy φ-ortonormált bázist $\mathbb{C}^2$-ben!

c) Adjuk meg φ Gram-mátrixát abban a $\mathcal{B}$ bázisban, amelynek elemei $\mathbf{b}_1 = (1, i)$ és $\mathbf{b}_2 = (1, -1)$.

4. Legyen $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}^* A\mathbf{y}$ az alábbi A mátrixszal.

a) Számítsuk ki a $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})$ értékét $\mathbf{x} = (1, i, 0)$, $\mathbf{y} = (2-i, 1, 1)$-re.

b) Adjuk meg a φ által definiált kvadratikus alakot.

c) Diagonalizáljuk az A mátrixot mint Gram-mátrixot, és adjunk φ-ortogonális bázist $\mathbb{C}^3$-ben. Mi a kvadratikus alak jellege?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 2 & 1 \\ 1-i & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

5. Bizonyítsuk be, hogy minden indefinit hermitikus bilineáris függvényre nézve van olyan nem nulla vektor, amely merőleges önmagára!

6. Tekintsük $\mathbb{R}^2$-en a $\varphi(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \det[\mathbf{u} \mid \mathbf{v}]$ bilineáris függvényt. Írjuk fel φ Gram-mátrixát a standard bázisban! Van-e $\mathbb{R}^2$-nek φ-ortogonális bázisa?

7. Számítsuk ki az $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix redukált és teljes SVD-felbontását!

8. Számítsuk ki az $A = \begin{bmatrix} 2i & 2i \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ mátrix SVD-felbontását, és annak felhasználásával az A^* és A^{-1} mátrixok SVD-felbontását is!

Házi feladatok

Beadási határidő: május 2.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni. Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Határozzuk meg $\mathbb{R}^3$-ben az $(1, -1, 1)$ vektor által generált altér bal, illetve jobb oldali merőlegesét a $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{y}$ bilineáris függvényre nézve, ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

2. Egy $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$-en értelmezett komplex bilineáris függvény $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = i\bar{x}_1 y_2 - i\bar{x}_2 y_1$.
a) Írjuk fel φ Gram-mátrixát a standard bázisban!
b) Lássuk be, hogy φ hermitikus!
c) Határozzuk meg a jellegét!

3. Adjunk meg egy olyan bázist, amelyben az előző feladatbeli φ mátrixa diagonális! Írjuk fel a kvadratikus alakot ebben a bázisban!

4. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, és tekintsük a

$$\varphi(p, q) = p(a)q(b) + q(a)p(b)$$

bilineáris függvényt a legfeljebb elsőfokú valós polinomok terén. Írjuk fel a φ mátrixát a standard $\{1, x\}$ bázisban! Az a és b értékétől függően mi a jellege a φ-hez tartozó kvadratikus alaknak?

5. Állítsuk elő az alábbi A mátrix redukált és teljes SVD-felbontását!

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

6. Az $A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix SVD-felbontása

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Adjuk meg A^{-1} SVD-felbontását (Figyeljünk a szinguláris értékek sorrendjére)!

7*. Melyek azok a $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ valós szimmetrikus bilineáris függvények, amelyekre bármely $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ vektor eleme egy φ-ortogonális bázisnak?