1. Minél egyszerűbben határozzuk meg az alábbi mátrixok redukált SVD-felbontását!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Írjuk fel az 1. feladatbeli B és C mátrixok teljes SVD-felbontását és a C mátrix SVD-felbontásának diadikus alakját!

3. Számítsuk ki az 1.-beli B és C mátrixok pszeudoinverzét az SVD-felbontás segítségével!

4. Számítsuk ki az 1. feladatbeli négyzetes mátrixok polárfelbontását! Melyiknek van többféle is?

5. Adjuk meg az 1.-beli nem 1-rangú mátrixok legjobb 1-rangú közelítését! Mekkora a közelítő mátrix eltérése Frobenius-normában?

6. Írjuk fel az alábbi mátrix karakterisztikus polinomját és minimálpolinomját!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Van-e az egységmátrixon kívül olyan mátrix $\mathbb{R}^{2\times 2}$-ben, illetve $\mathbb{Q}^{2\times 2}$-ben, amelynek az ötödik hatványa az egységmátrix?

8. Lássuk be, hogy a 2×2-es mátrixok között pontosan azok hasonlók, amelyeknek megegyezik a minimálpolinomjuk, de 3×3-as mátrixokra ez már nem igaz.

9. Hasonlóság erejéig hány olyan valós, illetve komplex 2×2-es mátrix van, amelynek a köbe az egységmátrix?

Házi feladatok

Beadási határidő: május 8.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni. Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Adjuk meg az $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix redukált és teljes SVD-felbontását!

2. Írjuk fel a $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix redukált SVD-felbontását, és számítsuk ki ebből a pszeudoinverzét!

3. Határozzuk meg a $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ mátrix SVD-felbontását, és adjuk meg ennek segítségével a polárfelbontását!

4. Határozzuk meg 3. feladat C mátrixának és C^{-1}-nek is a legjobb 1 rangú közelítését!

5. Írjuk fel az alábbi mátrix karakterisztikus polinomját és minimálpolinomját!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. A Cayley–Hamilton-tétel bizonyításában felírtuk egy A mátrixra az $\mathrm{adj}(A - xI)$ mátrixot mint mátrixegyütthatós polinomot. Számítsuk ki ezt a polinomot (írjuk is fel mindegyik márixegyütthatót) az alábbi A mátrixra!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

7*. Bizonyítsuk be, hogy minden $\mathbb{Z}_2$ fölötti 2×2-es mátrix nyolcadik hatványa megegyezik a négyzetével! Fogalmazzuk meg az állítást a minimálpolinomokkal kapcsolatos állításként!