1. Van-e az A mátrixnak 1-dimenziós, illetve 2-dimenziós invariáns altere $\mathbb{R}^4$-ben?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Bizonyítsuk be, hogy ha $A, B \in K^{n\times n}$-re $AB = BA$, akkor A minden sajátaltere B-invariáns.

3. Legyen $A = \operatorname{diag}(B_1, \dots, B_k)$ blokkdiagonális mátrix. Bizonyítsuk be, hogy
a) $k_A(x) = k_{B_1}(x) \cdot k_{B_2}(x) \cdots k_{B_k}(x)$;
b) $m_A(x) = [m_{B_1}(x), m_{B_2}(x), \cdots, m_{B_k}(x)]$;
c) $r(A) = r(B_1) + r(B_2) + \ldots + r(B_k)$.
Mi a helyzet, ha A csak blokkháromszög alakú?

4. Bizonyítsuk be (testbővítésre való hivatkozás nélkül), hogy tetszőleges test fölötti négyzetes mátrixra van olyan $k \in \mathbb{N}^+$, amelyre $m_A(x) \mid k_A(x) \mid m_A(x)^k$.
(Útmutatás: Lássuk be, hogy A vagy hasonló egy kísérő mátrixhoz, vagy hasonló egy valódi blokkháromszög-mátrixhoz.)

5. Mi lehet a Jordan-féle normálalakja annak a komplex mátrixnak, amelynek a
a) karakterisztikus polinomja $(x-1)^6$, minimálpolinomja $(x-1)^4$, az 1-hez tartozó V_1 sajátaltér dimenziója 2;
b) karakterisztikus polinomja $-(x-\lambda)^7$, minimálpolinomja $(x-\lambda)^3$, $\dim(V_\lambda) = 3$, ahol V_λ a λ sajátértékhez tartozó sajátaltér?

6. Mi az alábbi mátrixok Jordan-féle normálalakja?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

7. Hasonlóság erejéig hány olyan komplex mátrix van, melynek
a) karakterisztikus polinomja $-(x-1)^3(x-3)^4$;
b) minimálpolinomja $(x+2)^6$, és sajátaltere 2-dimenziós?

8. Mutassuk meg, hogy ha két 3×3-as vagy 2×2-es komplex mátrix karakterisztikus polinomja és minimálpolinomja megegyezik, akkor a két mátrix hasonló.

9. Mi lehet az A^2 mátrix minimálpolinomja, ha $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ minimálpolinomja $(x+1)^2$?

Házi feladatok

Beadási határidő: május 15.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni. Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi valós A mátrixnak nincs 1-dimenziós invariáns altere, viszont $\operatorname{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ és $\operatorname{span}((-1,0,-1,1),(0,1,2,-1))$ invariáns alterek. Hozzuk ennek alapján az A mátrixot 2×2-es blokkdiagonális alakra!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Bizonyítsuk be, hogy ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, és $U \le \mathbb{R}^n$ az A-nak invariáns altere, akkor $U^\perp$ az A^T-nak invariáns altere.

3. Mi az alábbi mátrixok Jordan-féle normálalakja, és mi a minimálpolinomjuk?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Mi lehet a Jordan-féle normálalakja annak a komplex mátrixnak, melynek

a) karakterisztikus polinomja $-(x-2)^7$, minimálpolinomja $(x-2)^4$, a 2-höz tartozó V_2 sajátaltér dimenziója 2;

b) karakterisztikus polinomja $(x-\lambda)^8$, minimálpolinomja $(x-\lambda)^4$, $\dim(V_\lambda) = 3$, ahol V_λ a λ sajátértékhez tartozó sajátaltér?

5. Legyen A egy 5×5-ös, 2 sajátértékű, B pedig egy 5×5-ös, 0 sajátértékű Jordan-blokk. Mi az A^2 és a B^2 mátrix Jordan-normálalakja?

6. Hasonlóság erejéig hány olyan komplex mátrix van, melynek

a) karakterisztikus polinomja $-(x-2)^5(x+3)^2$;

b) minimálpolinomja $(x-1)^5$, és sajátaltere 2-dimenziós?

7*. Legyen $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, és tegyük fel, hogy a $C = AB - BA$ mátrix rangja 1. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $C^2 = 0$. (Útmutatás: Mit mondhatunk C nyomáról?)