1. Legyen A 10×10-es valós mátrix! Jelölje r_i az A^i rangját! Lehet-e az $(r_1, r_2, \dots)$ sorozat egyenlő az alábbiakkal?

a) $(5, 6, \dots)$;

b) $(9, 8, 7, \dots, 4, 4, \dots)$;

2. Egy 10×10-es A mátrix sajátértékei $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ Az $A - \lambda_1 I$ hatványainak rangja rendre $8, 6, 5, 4, 4$. Az $A - \lambda_2 I$ hatványainak rangja rendre $7, 6, 6$. Írjuk fel A Jordan-féle normálalakját!

3. Bizonyítsuk be, hogy ha $K \le L$ végtelen testek, és $A, B \in K^{n\times n}$ hasonlók mint L fölötti mátrixok, akkor $K^{n\times n}$-ben is hasonlók!

4. Bizonyítsuk be, hogy minden négyzetes mátrix hasonló a transzponáltjához!

5. Határozzuk meg az alábbi mátrixok Jordan-féle normálalakját, és adjuk meg egy Jordan-bázisát!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

6. Határozzuk meg az alábbi mátrix karakterisztikus és minimálpolinomját! Bontsuk fel a minimálpolinomot relatív prím faktorokra $\mathbb{R}$ fölött, és hozzuk a mátrixot ennek a felbontásnak megfelelő blokkdiagonális alakra! Mi a mátrix $\mathbb{C}$ fölötti Jordan-normálalakja?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

7. Igazoljuk, hogy minden invertálható komplex mátrixnak van négyzetgyöke! Mutassuk meg, hogy szinguláris mátrixokra ez nem feltétlenül igaz! Adjuk meg az $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix valamelyik négyzetgyökét!

8. Hasonlóság erejéig hány olyan 3×3-as komplex mátrix van, amelynek a négyzete megegyezik a köbével?

9. Határozzuk meg az alábbi A mátrix Jordan-normálalakját és Jordan-bázisát, majd ennek a segítségével számítsuk ki az A^n hatványokat!

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Házi feladatok

Beadási határidő: május 22.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni. Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Legyen A 10×10-es valós mátrix! Jelölje r_i az A^i rangját! Lehet-e az $(r_1, r_2, \ldots)$ sorozat egyenlő az alábbiakkal?
a) $(10, 9, 8, \ldots)$;
b) $(8, 5, \ldots)$.

2. Egy 10×10-es A mátrix sajátértékei $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 5$. Az $A - \lambda_1 I$ hatványainak rangja rendre $8, 7, 6, 6$. Az $A - \lambda_2 I$ hatványainak rangja rendre $7, 5, 4, 4$. Írjuk fel A Jordan-féle normálalakját!

3. Határozzuk meg az alábbi mátrix Jordan-féle normálalakját, és adjuk meg egy Jordan-bázisát!

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

4. Legyen J a 3. feladatban kiszámolt Jordan-mátrix. Írjuk fel a J^{10}, és ebből az A^{10} mátrixot, továbbá ezek (nyilván megegyező) Jordan-normálalakját!

5. Hasonlóság erejéig hány olyan 3×3-as komplex mátrix van, amelynek a négyzete megegyezik a negyedik hatványával?

6. Vonjunk négyzetgyököt a $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ mátrixból $\mathbb{C}^{2\times 2}$-ben! Létezhet-e valós négyzetgyöke?

7*. Van-e olyan 3×3-as valós, 0 nyomú A mátrix, amelyre $A^2 + A^T = I$?