

1. Legyen $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ az origó körüli $+45^\circ$ -os forgatás, B pedig az x tengely irányú kétszeres nyújtás standard mátrixa. Határozzuk meg a két mátrix és a BA szorzatmátrix 1-, 2- és ∞ -normáját geometriai és algebrai módszerrel is!
2. Határozzuk meg az alábbi mátrixok Frobenius-normáját, 1-, 2- és ∞ -normáját és spektrálsugarát!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

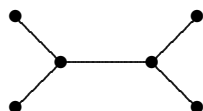
3. Mutassuk meg, hogy egy $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix spektrálsugara legföljebb akkora, mint bármely indukált mátrixnorma szerinti normája, képlettel:

$$\rho(A) \leq \|A\|,$$

speciálisan legföljebb akkora, mint a 2-normája!

4. Mutassuk meg, hogy ha A normális mátrix, akkor a 2-normája egyenlő a spektrálsugarával!
5. Adjuk meg az $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix legjobb 1 rangú közelítését a Frobenius-, 2-, 1- és ∞ -norma szerint! (Az első kettőnél használjuk az Eckart–Young-tételt!.)
6. Bizonyítsuk be, hogy egy d -reguláris egyszerű irányítatlan gráf szomszédsági mátrixának spektrálsugara és 1-, 2 és ∞ -normája is d .
7. Mi a spektruma az alábbi gráfoknak? Az a) és b) feladatbeli gráfokra keressük meg a sajátvektorokat is!
 - a) 3, illetve 4 szögpontú teljes gráf
 - b) 4 hosszú kör

c)



Házi feladat pótlása

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni. Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Írjuk fel az $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ lineáris transzformáció, illetve a $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{y}$ bilineáris függvény mátrixát a $\mathcal{B} = \{(0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, -1, 2)\}$ bázisban, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi A mátrix diagonalizálható, és írjuk fel az A^n mátrixhatványt!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Határozzuk meg az alábbi önadjungált mátrixok jellegét (definittségét), és az egyikhez (mindegy, melyikhez) adjunk olyan bázist, amelyben a hozzá tartozó kvadratikus alak mátrixa diagonális!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

4. Adjuk meg az A mátrix Jordan-féle normálalakját, ha

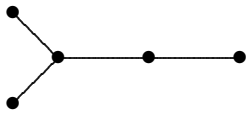
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Írjuk fel az e^{-J} mátrixot is, ahol J az A Jordan-normálalakja.

5. Tekintsük az alábbi mátrixokat:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Határozzuk meg a Frobenius-, 1-, 2- és ∞ -normájukat és a spektrálsugarukat!

6. Határozzuk meg a  gráf spektrumát!