1. *Keressük meg azt a mátrixot, mely a definíció alapján igazolja, hogy az alábbi két mátrix kongruens, azaz olyan invertálható P mátrixot, amelyre $B = P^T AP$, ha*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Megoldás: Hozzuk szimultán sor-oszlopműveletekkel diagonális alakra az A mátrixot, aztán a diagonális elemeket előjelek szerint B-nek megfelelően rendezzük a megfelelő oszlopok és sorok cseréjével, majd a $c \neq 0, \pm 1$ diagonális elemek sorát és oszlopát elosztjuk $\sqrt{|c|}$-vel, hogy megkapjuk a B mátrixot.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \overset{s}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \overset{s}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{s}{\mapsto}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \overset{s}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

és az áttérés mátrixát megkapjuk, ha I-re is végrehajtjuk az oszlopműveleteket:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = P.$$

Alternatív megoldás:
Ortogonális diagonalizálással is diagonális alakra hozhatjuk az A mátrixot (ekkor a sajátértékeket a B-nek megfelelő előjelsorrendben vesszük sorra),
és a $Q^{-1}AQ = Q^T AQ = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n) = D$ diagonális mátrixot tovább bontjuk:
$D = \operatorname{diag}(c_1, \ldots, c_n) \operatorname{diag}(\operatorname{sgn}(d_1), \ldots, \operatorname{sgn}(d_n)) \operatorname{diag}(c_1, \ldots, c_n) = CBC$
alakban, ahol $c_i = \sqrt{|d_i|}$, ha $d_i \neq 0$, és 1 különben, sgn pedig az előjelfüggvény. Ekkor $Q^T AQ = CBC = C^T BC$-ből $B = (QC^{-1})^T A(QC^{-1})$.
A sajátértékek $3, 0, -3$, és hozzájuk tartozó sajátvektorok rendre $(2, 2, 1)$, $(-2, 1, 2)$ és $(1, -2, 2)$. Tehát

$$Q^T AQ = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$P = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 2 & -2\sqrt{3} & 1 \\ 2 & \sqrt{3} & -2 \\ 1 & 2\sqrt{3} & 2 \end{bmatrix}$$

invertálható mátrixszal $B = P^T AP$.

2. *Adjunk példát olyan $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixokra, amelyekre*
a) $A \cong B$, *de* $A \not\sim B$;
b) $A \sim B$, *de* $A \not\cong B$.

Megoldás: a) $I \cong (2I)^T I(2I) = (2I)I(2I) = 4I$, de I nyilván nem hasonló $4I$-hez (I-t bármivel konjugálva $P^{-1}IP = I$-t kapjuk).

b) Elég olyan A szimmetrikus mátrixot találni, amit valamivel megkonjugálva (nyilván nem ortogonálissal) nem szimmetrikus mátrixot kapunk, mert szimmetrikus mátrix csak szimmetrikussal lehet kongruens. Például $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ és $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ választással $B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ hasonlók, de nem kongruensek.

3. *Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{R}^{n\times n}$-ben*

a) a kongruencia megőrzi a mátrix rangját és a determináns előjelét;

b) ha $A \cong B$, akkor az $\mathbf{x}^T A\mathbf{y}$ és $\mathbf{x}^T B\mathbf{y}$ bilineáris függvényekhez tartozó kvadratikus alakok mátrixa is kongruens.

Megoldás: a) $r(P^T AP) \le r(A)$, és $r(A) = r((P^T)^{-1}P^T APP^{-1}) \le r(P^T AP)$, tehát $r(A) = r(P^T AP)$.

b) Egy $\mathbf{x}^T A\mathbf{y}$ bilineáris függvényhez tartozó kvadratikus alak mátrixa $\frac{1}{2}(A+A^T)$. Ha $P^T AP = B$, akkor $P^T \frac{1}{2}(A + A^T)P = \frac{1}{2}P^T(A + A^T)P = \frac{1}{2}(P^T AP + P^T A^T P) = \frac{1}{2}(P^T AP + (P^T AP)^T) = \frac{1}{2}(B + B^T)$.

4. *Milyen feltétel mellett lesz az alábbi valós mátrix pozitív, illetve negatív definit? Milyen jellege lehet még a mátrixnak más a értékekre?*

$$A = \begin{bmatrix} a & 2 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

Megoldás: A főminorjai rendre a, $a^2 - 4$, $a(a^2 - 4)$. Ezek akkor mind pozitívak, ha $a > 2$, tehát ekkor lesz A pozitív definit, és akkor $-, +, -$ előjelűek, ha $a < -2$, tehát A pontosan ekkor negatív definit. Ahhoz, hogy valamilyen szemidefinit, de ne definit legyen, az A mátrixnak szingulárisnak kell lennie, azaz $|A| = (a^2 - 4)a = 0$, és ez csak $a = 0, 2, -2$ esetén teljesül. Könnyen látható, hogy $a = 0$ esetén a mátrix indefinit: a $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ bal fölső sarokmátrix sajátértékei ± 2, tehát az indefinit, és így A is. Ha $a = 2$, akkor szimultán sor-oszlopműveletekkel $A \cong \operatorname{diag}(2, 0, 2)$, ha pedig $a = -2$, akkor $A \cong \operatorname{diag}(-2, 0, -2)$.

Összefoglalva: A negatív definit, ha $a < -2$, negatív szemidefinit (de nem definit), ha $a = -2$, pozitív szemidefinit (de nem definit), ha $a = 2$, pozitív definit, ha $a > 2$, és a maradék esetekben, tehát $-2 < a < 2$ esetén, indefinit.

5. *a) Bizonyítsuk be, hogy $x^4 + 5x^3 + x + 6$ nem lehet egy valós szimmetrikus mátrix karakterisztikus polinomja.*

b) Egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix karakterisztikus polinomja $k_A(x) = -(x^3 + 2x^2 - 10x + 6)$. A Descartes-féle előjelszabály segítségével állapítsuk meg a mátrix jellegét!

Megoldás: a) Az $f(x) = x^4 + 5x^3 + x + 6$ polinomnak nyilván nem lehet pozitív gyöke, ehhez még a Descartes-féle előjelszabály sem kell. Az $f(-x) = x^4 - 5x^3 - x + 6$ polinom együtthatóin két előjelváltás van, ezért f-nek legföljebb két valós negatív gyöke lehet (multiplicitással számolva). Ebből következik, hogy f-nek nem minden gyöke valós, tehát nem lehet egy szimmetrikus mátrix karakterisztikus polinomja

b) A polinom együtthatói kétszer váltanak előjelet. Mivel tudjuk, hogy minden gyöke valós, ebből következik, hogy a pozitív gyökök száma pontosan 2, így van negatív gyöke is, tehát a mátrix indefinit.

6. *Bizonyítsuk be, hogy egy pozitív szemidefinit és egy pozitív definit mátrix összege mindig pozitív definit.*

Megoldás: Ha P pozitív definit, S pedig pozitív szemidefinit, akkor minden $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektorra $\mathbf{x}^T(P + S)\mathbf{x} = \mathbf{x}^T P\mathbf{x} + \mathbf{x}^T S\mathbf{x} > 0$, ugyanis az első tag pozitív, a második nemnegatív.

7. *Tekintsük a $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T B\mathbf{y}$ valós bilineáris függvényt, ahol $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$*

a) Határozzuk meg, a hozzá tartozó kvadratikus alak mátrixát és jellegét!

b) Adjunk meg $\mathbb{R}^2$-ben olyan bázist, amelyben a kvardatikus alak négyzetösszeg, és írjuk fel ebben a bázisban a kvadratikus alakot!

Megoldás:

$$[A \mid I] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 4 \end{bmatrix} \overset{s}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{9}{4} \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{9}{4} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = P.$$

Tehát a kvadratikus alak indefinit, az új bázis $\mathcal{B} = \{(1,0),\ (-\frac{5}{2},1)\}$. A kvadratikus alak a standard bázisban $x_1^2 + 5x_1x_2 + 4x_2^2$, a $\mathcal{B}$-ben felírt négyzetösszeg alakja pedig $(x_1')^2 - \frac{9}{4}(x_2')^2$, ahol $\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = P^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + \frac{5}{2}x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

8. *Határozzuk meg az alábbi A mátrix pozitív (szemi)definit négyzetgyökét.*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Mivel A szimmetrikus, diagonalizálható is, és így van spektrálfelbontása. $k_A(x) = -x^3 + 18x^2 - 81x = -x(x-9)^2$, tehát a sajátértékei $9, 9, 0$.
A spektrálfelbontást meghatározó egyenletek: $P_1 + P_2 = I$, $9P_1 + 0P_2 = A$, így $P_1 = \frac{1}{9}A$, az A felbontása $A = 9(\frac{1}{9}A) + 0P_2 \Rightarrow$ a pozitív szemidefinit négyzetgyök $B = 3(\frac{1}{9}A) + 0P_2 = \frac{1}{3}A$.
Alternatív megoldás:
Kicsit fáradságosabb az ortogonális diagonalizálással való négyzetgyökvonás.
A 0-hoz tartozó egységnyi sajátvektor $\frac{1}{3}(2,-2,1)$. V_9 ennek a merőleges kiegészítője, annak egy lehetséges ortonormált bázisa $\{\frac{1}{3}(2,1,-2), \frac{1}{3}(1,2,2)\}$. Tehát a

$$Q = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

ortogonális mátrixszal $Q^{-1}AQ = \mathrm{diag}(0,9,9) = D$, azaz $A = QDQ^{-1}$, és ebből A egy négyzetgyöke $Q\sqrt{D}Q^{-1} = Q\sqrt{D}Q^T =$

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix},$$

amely szintén pozitív szemidefinit, mert egy pozitív szemidefinit diagonális mátrix ortogonálissal való konjugáltja.

9. *Lássuk be, hogy az alábbi A mátrix nem kongruens semelyik valós diagonális mátrixszal, de alsó (és felső) háromszögmátrixszal kongruens. Lehet-e az utóbbinál az áttérés mátrixa ortogonális?*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás: A nem lehet diagonálissal kongruens, mivel nem szimmetrikus.
Ha kongruens felső háromszögmátrixot keresünk, akkor A-t alakítsuk át szimultán sor-oszlopműveletekkel. A sorműveleteket a felső háromszögmátrix alakra hozáshoz választjuk (vigyázunk arra, hogy ha az i. oszlopig rendben van, akkor a sorműveletek az első i soron, és így a sor-oszlopműveletek az első i oszlopon ne változtassanak). Természetesen itt a megfelelő oszlopműveletek nem feltétlenül nulláznak, de az nem is cél.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{s}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{s}{\mapsto}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \overset{s}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cong A$$

Az alsó háromszög alakra hozást lehetne felfelé nullázással csinálni, de a Gauss-elminációnál a másik irányt szoktuk meg, ezért inkább A^T-at hozzuk felső háromszög alakra.

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \overset{s}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \overset{s}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \overset{s}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{s}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{s}{\mapsto}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \overset{s}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = B \cong A^T \quad \Rightarrow \quad A \cong B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Nem lehet ortogonális konjugálással háromszög alakra hozni a mátrixot, mert ha lehetne, akkor A minden sajátértéke valós lenne (a sajátértékek megegyeznének a háromszögmátrix sajátértékeivel, amik a háromszögmátrix diagonális elemei). De A karakterisztikus polinomja $k_A(x) = -x^3 + 6x^2 - 6x + 3$, és egy kis függvényvizsgálattal láthatjuk, hogy ennek csak egy valós gyöke van.