**1.** *Bizonyítsuk be, hogy ha egy szimmetrikus mátrix nem indefinit, lehet csupán lefelé ható sorműveletekkel felső háromszög alakra hozni (ahogy az LU-felbontásban), és az így kapott háromszögmátrix diagonális része kongruens az eredeti mátrixszal (tehát meghatározza a jellegét).*

*Megoldás:* Tegyük fel, hogy az $A$ mátrix első $i-1$ oszlopból álló részmátrixát sikerült felső háromszögalakra hozni lefelé ható sorműveletekkel (legyen az $A$ mátrixból így kapott mátrix $A'$), de az $i$.-et nem sikerül, mert $a'_{ii} = 0$, de van olyan $j > i$, hogy $a'_{ji} \neq 0$. Hajtsuk végre az eddigi sorműveleteknek megfelelő oszlopműveleteket az $A'$-n, így egy $A'' \cong A$ szimmetrikus mátrixot kapunk, amelynek az átlója és az első $i-1$ diagonális eleme alatti része ugyanaz, mint az $A'$ mátrixban, mert csak diagonális alatt csupa nullát tartalmazó oszlopokat adtunk hozzá nagyobb indexűekhez. De ebben az $i$. és $j$. sorok és oszlopok által meghatározott szimmetrikus elhelyezkedésű $2\times 2$-es részmátrix $\begin{bmatrix} 0 & a''ij \\ a'_{ji} & a'_{jj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a'ji \\ a'_{ji} & a'_{jj} \end{bmatrix}$, amelynek determinánsa $-(a'_{ji})^2$ negatív, így ez a részmátrix indefinit, és emiatt $A''$ és a vele kongruens $A$ is indefinit lenne.
Tehát végig tudjuk csinálni az LU-felbontást (legyen az $U$ diagonális elemeit tartalmazó diagonális mátrix $D$), és az $L$ transzponáltjával jobbról szorozva (azaz a sorműveleteknek megfelelő oszlopműveleteket elvégezve) a fenti indoklás miatt $A$-val kongruens, $U$-val azonos diagonálisú szimmetrikus felső háromszögmátrixot kapunk, azaz $D \cong A$.

**2.** *Határozzuk meg a $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{y}$ valós bilineáris függvényre nézve a $W = \operatorname{span}((1,1,0),(0,2,1))$ altér jobb és bal oldali merőlegesét, ha*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

*Megoldás:* Legyen

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a $W$ báziselemeiből mint oszlopokból álló mátrix. Ekkor
$W^\perp = \{\,\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{w},\mathbf{x}\rangle = 0\ \forall \mathbf{w}\in W\,\} = \{\,\mathbf{x} \mid B^T A\mathbf{x} = \mathbf{0}\,\} = \mathcal{N}(B^T A)$.

$$B^T A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \mapsto\mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = t\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

tehát $W^\perp = \operatorname{span}((2,1,-1))$,
és ${}^\perp W = \{\,\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{x},\mathbf{w}\rangle = 0\ \forall \mathbf{w}\in W\,\} = \{\,\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T AB = \mathbf{0}^T\,\} = \{\,\mathbf{x} \mid (AB)^T\mathbf{x} = \mathbf{0}\,\} = \mathcal{N}((AB)^T)$

$$(AB)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \mapsto\mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = t\begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

tehát ${}^\perp W = \operatorname{span}((4,1,-2))$.

**3.** *Legyen egy $\varphi$ komplex skalárszorzat (azaz pozitív definit hermitikus bilin. fv.) Gram–mátrixa az $\mathcal{E} = \{\,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\,\}$ standard bázisban $\begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$.*

*a) Számítsuk ki $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ hosszát és skaláris szorzatát a $(\mathbb{C}^2,\varphi)$ euklideszi térben.*
*b) Adjunk meg egy $\varphi$-ortonormált bázist $\mathbb{C}^2$-ben!*
*c) Adjuk meg $\varphi$ Gram-mátrixát abban a $\mathcal{B}$ bázisban, amelynek elemei $\mathbf{b}_1 = (1,i)$ és $\mathbf{b}_2 = (1,-1)$.*

*Megoldás:* a) A standard bázis elemeinek skalárszorzatát egyszerűen leolvashatjuk a Gram-mátrixból: $\mathbf{e}_i^* A\mathbf{e}_j = a_{ij}$. Tehát $\|\mathbf{e}_1\| = \sqrt{\varphi(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1)} = \sqrt{2}$, $\|\mathbf{e}_2\| = \sqrt{2}$, és $\varphi(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2) = i$.

b) A $\varphi$-ortogonalizáláshoz a második bázisvektort kell ortogonalizálni az elsőre.

$$\mathbf{c}_2' := \mathbf{e}_2 - \frac{\varphi(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)}{\varphi(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1)}\mathbf{e}_1 = (0,1) - \frac{i}{2}(1,0) = \left(-\frac{i}{2},1\right) \;\Rightarrow\; \mathbf{c}_2 = (-i,2).$$

Tehát $\{\,\mathbf{e}_1,\mathbf{c}_2\,\}$ $\varphi$-ortogonális vektorrendszer, és $\mathbf{e}_1$ $\varphi$-normája $\sqrt{2}$, míg

$$\varphi(\mathbf{c}_2,\mathbf{c}_2) = [\,i \quad 2\,]\begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -i \\ 2 \end{bmatrix} = 6,$$

ezért $\left\{\,\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0),\ \frac{1}{\sqrt{6}}(-i,2)\,\right\}$ $\varphi$-ortonormált bázis.

c) Az új bázisra való áttérés $P$ mátrixa és az új bázisbeli Gram-mátrix:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -1 \end{bmatrix}, \qquad [f]_{\mathcal{B}} = P^*[f]_{\mathcal{E}}P = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 4 \end{bmatrix}.$$

**4.** *Legyen $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}^*A\mathbf{y}$ az alábbi $A$ mátrixszal.*
*a) Számítsuk ki a $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})$ értékét $\mathbf{x} = (1,i,0)$, $\mathbf{y} = (2-i,1,1)$-re.*
*b) Adjuk meg a $\varphi$ által definiált kvadratikus alakot.*
*c) Diagonalizáljuk az $A$ mátrixot mint Gram-mátrixot, és adjunk $\varphi$-ortogonális bázist $\mathbb{C}^3$-ben. Mi a kvadratikus alak jellege?*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 2 & 1 \\ 1-i & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

*Megoldás:* a)

$$\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \mathbf{x}^*A\mathbf{y} = [\,1 \quad -i \quad 0\,]\begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 2 & 1 \\ 1-i & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2-i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1-i$$

b) $q(\mathbf{x}) = |x_1|^2 + 2|x_2|^2 + 3|x_3|^2 + i\bar{x}_1x_2 - i\bar{x}_2x_1 + (1+i)\bar{x}_1x_3 + (1-i)\bar{x}_3x_1 + \bar{x}_2x_3 + \bar{x}_3x_2$

c) Szimultán sor-oszlopműveletekkel diagonalizáljunk! Figyeljünk arra, hogy ha a sorművelet $s_i \mapsto s_i + cs_j$, akkor az oszlopművelet $o_i \mapsto o_i + \bar{c}o_j$. Az $I$ egységmátrixra végrehajtva az alkalmazott oszlopműveleteket, megkapjuk az új bázisra való áttérés mátrixát.

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 2 & 1 \\ 1-i & 1 & 3 \end{bmatrix} \xmapsto[s_3-(1-i)s_1]{s_2+is_1} \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 0 & -i & 1 \end{bmatrix} \xmapsto[o_3-(1+i)o_1]{o_2-io_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & -i & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xmapsto{s_3+is_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xmapsto{o_3-io_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xmapsto[o_3-(1+i)o_1]{o_2-io_1} \begin{bmatrix} 1 & -i & -1-i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xmapsto{o_3-io_2} \begin{bmatrix} 1 & -i & -2-i \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P$$

Tehát a diagonális alak $\operatorname{diag}(1,1,0)$, és a hozzá tartozó bázis
$\{(1,0,0),\ (-i,1,0),\ (-2-i,-i,1)\,\}$. A kvadratikus alak pozitív szemidefinit.

**5.** *Bizonyítsuk be, hogy minden indefinit hermitikus bilineáris függvényre nézve van olyan nem nulla vektor, amely merőleges önmagára!*

*Megoldás:* Ha a $\varphi$ bilineáris függvény indefinit, akkor van olyan $\varphi$-ortogonális bázis, amelynek elemein a $\varphi$-hez tartozó kvadratikus alak pozitív és negatív értéket is fölvesz. Legyen $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ ez a két báziselem. Ekkor $\varphi(\mathbf{b},\mathbf{b}) = s^2$, $\varphi(\mathbf{c},\mathbf{c}) = -t^2$, és $\varphi(\mathbf{b},\mathbf{c}) = \varphi(\mathbf{c},\mathbf{b}) = 0$, ahol $s,t$ nemnulla valós számok. Az $\mathbf{u} = t\mathbf{b} + s\mathbf{c}$ vektor nem nulla, mert különben $\mathbf{c} = -\frac{t}{s}\mathbf{b}$-re $\varphi(\mathbf{c},\mathbf{c}) = \frac{t^2}{s^2}\varphi(\mathbf{b},\mathbf{b}) > 0$ lenne, és $\varphi(\mathbf{u},\mathbf{u}) = t^2\varphi(\mathbf{b},\mathbf{b}) + s^2\varphi(\mathbf{c},\mathbf{c}) - st\varphi(\mathbf{b},\mathbf{c}) - st\varphi(\mathbf{c},\mathbf{b}) = t^2s^2 - s^2t^2 = 0.$

**6.** *Tekintsük $\mathbb{R}^2$-en a $\varphi(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \det[\mathbf{u} \mid \mathbf{v}]$ bilineáris függvényt. Írjuk fel $\varphi$ Gram-mátrixát a standard bázisban! Van-e $\mathbb{R}^2$-nek $\varphi$-ortogonális bázisa?*

*Megoldás:*

$\varphi(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $\varphi(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $\varphi(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$, $\varphi(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Tehát a Gram-mátrix a standard bázisban $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Nincs $\varphi$-ortogonális bázis, mert ha lenne, akkor $A$ kongruens lenne egy diagonális, így szimmetrikus mátrixszal, tehát $A$ maga is szimmetrikus lenne.

**7.** *Számítsuk ki az $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix redukált és teljes SVD-felbontását!*

*Megoldás:* $A^*A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $k_{A^*A} = x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1)$.

$\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$, $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$A^*A$-hoz ortonormált sajátbázis a sajátértékek $3, 1$ sorrendjében: $\{\, \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1) \,\}$.

$V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $AV_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $U_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 2 & 0 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$ ($AV_1$ első oszlopát $\sigma_1 = \sqrt{3}$-mal, a másodikat $\sigma_2 = 1$-gyel osztottuk le.)

Redukált felbontás: $A = U_1 \Sigma_1 V_1^* = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 2 & 0 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ A teljes felbontáshoz csak $U_1$-et kell kiegészíteni unitérré (ortogonálissá), és $\Sigma_1$-et nullákkal $3 \times 2$-essé, mert $V_1$ maga is unitér. $U_1$-ben harmadik oszlopnak jó lesz az első kettő vektoriális szorzata, így a teljes felbontás:

$A = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

**8.** *Számítsuk ki az $A = \begin{bmatrix} 2i & 2i \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ mátrix SVD-felbontását, és annak felhasználásával az $A^*$ és $A^{-1}$ mátrixok SVD-felbontását is!*

*Megoldás:*

$$A^*A = \begin{bmatrix} -2i & 1 \\ -2i & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2i & 2i \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$k_{A^*A}(x) = x^2 - 10x + 16$, tehát $A^*A$ sajátértékei $8, 2$, és $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$, illetve $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$ hozzájuk tartozó sajátvektorok.

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad AV = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2}i & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0\sqrt{2} & \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$A = U\Sigma V^* = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$A^* = V\Sigma^*U^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$A^{-1} = V\Sigma^{-1}U^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, de ebben a szinguláris értékek nem fogyó, hanem növő sorrendben vannak, ezért megfordítjuk a szinguláris értékek, és velük együtt a hozzájuk tartozó jobb és bal szinguláris vektorok (azaz $V$ oszlopainak és $U^*$ sorainak) sorrendjét is, hogy SVD-felbontást kapjunk:

$$A^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/2\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -i & 0 \end{bmatrix}.$$