1. *Van-e az A mátrixnak 1-dimenziós, illetve 2-dimenziós invariáns altere $\mathbb{R}^4$-ben?*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Ha $U = \operatorname{span}(\mathbf{u})$ egydimenziós invariáns altér, akkor $A\mathbf{u} \in \operatorname{span}(\mathbf{u})$, azaz $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ valamely $\lambda \in \mathbb{R}$-re (és fordítva, minden sajátvektor invariáns alteret generál). Viszont A karakterisztikus polinomja

$$k_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1-x & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2-x & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1-x & -1 & 2 \\ 3 & -2-x & 2 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} 1-x & 1 & -1 \\ 1 & 1-x & -1 \\ 4 & 3 & -2-x \end{vmatrix} =$$

$-(-2-6+4+2x+2-2x) - x(-x^3+3x-2-4-3+4-4x+2+x+3-3x) = 2 - x(-x^3-3x) = x^4+3x^2+2 = (x^2+1)(x^2+2)$, tehát A-nak nincs valós sajátértéke, így nincs egydimenziós invariáns altere $\mathbb{R}^4$-ben.

Mivel $k_A(x)$ minden $\mathbb{C}$-beli gyöke egyszeres, A-nak mint komplex mátrixnak a minimálpolinomja is $(x^2+1)(x^2+2)$. De akkor az $\mathbb{R}[x]$-beli minimálpolinomja sem lehet kisebb fokú. Ez azt jelenti, hogy $k_A(A) = (A^2+I)(A^2+2I) = O$, viszont A^2+2I nem nulla, ezért A^2+I nem lehet invertálható. Keressük meg A^2+I magját!

$$A^2 + I = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tehát $\operatorname{Ker}(A^2+I)$ a 2-dimenziós $\operatorname{span}((-1,1,0,0),(0,0,1,1))$ altér, és tudjuk, hogy A tetszőleges polinomjának magtere, tehát ez is, A-invariáns.

Másképp: keressünk egy sajátvektort $\mathbb{C}^4$-ben! A sajátértékek $\pm i$, $\pm 2i$.

$$A - iI = \begin{bmatrix} 1-i & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1-i & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2-i & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & -1 & 1+i \\ 0 & 1-i & -1 & 2+i \\ 0 & 3 & -2-i & 2+4i \end{bmatrix} \mapsto$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & -1 & 1+i \\ 0 & 0 & -i & i \\ 0 & 0 & 1-i & -1+i \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Egy sajátvektor $\mathbf{v} = (i, -i, 1, 1)$, tehát $A\mathbf{v} = i\mathbf{v}$, így $A\operatorname{Re}\mathbf{v} + iA\operatorname{Im}\mathbf{v} = A\mathbf{v} = i(\operatorname{Re}\mathbf{v} + i\operatorname{Im}\mathbf{v}) = -\operatorname{Im}\mathbf{v} + i\operatorname{Re}\mathbf{v}$, s mivel A valós mátrix, ebből $A\operatorname{Re}\mathbf{v} = -\operatorname{Im}\mathbf{v}$ és $A\operatorname{Im}\mathbf{v} = \operatorname{Re}\mathbf{v}$ következik, tehát $U = \operatorname{span}(\operatorname{Re}\mathbf{v}, \operatorname{Im}\mathbf{v}) = \operatorname{span}((0,0,1,1),(1,-1,0,0))$ kétdimenziós invariáns altér.

2. *Bizonyítsuk be, hogy ha $A, B \in K^{n\times n}$-re $AB = BA$, akkor A minden sajátaltere B-invariáns.*

Megoldás: Legyen $V_\lambda \leq K^n$ az A λ-hoz tartozó sajátaltere. Ha $\mathbf{v} \in V_\lambda$, akkor $A(B\mathbf{v}) = (AB)\mathbf{v} = (BA)\mathbf{v} = B(A\mathbf{v}) = B\lambda\mathbf{v} = \lambda(B\mathbf{v})$, tehát $B\mathbf{v} \in V_\lambda$.

3. *Legyen $A = \operatorname{diag}(B_1, \ldots, B_k)$ blokkdiagonális mátrix. Bizonyítsuk be, hogy*

a) $k_A(x) = k_{B_1}(x) \cdot k_{B_2}(x) \cdots k_{B_k}(x)$;

b) $m_A(x) = [m_{B_1}(x), m_{B_2}(x), \cdots, m_{B_k}(x)]$;

c) $r(A) = r(B_1) + r(B_2) + \ldots + r(B_k)$.

Mi a helyzet, ha A csak blokkháromszög alakú?

Megoldás: a) $k_A(x) = |A - xI| = |\mathrm{diag}(B_1 - xI, \dots, B_k - xI)| = |B_1 - xI| \cdots |B_k - xI| = k_{B_1}(x) \cdots k_{B_k}(x)$.

b) Tetszőleges $f(x) \in K[x]$ polinomra $f(A) = \mathrm{diag}(f(B_1), \dots, f(B_k))$, így $f(A) = O \Leftrightarrow f(B_i) = O\ \forall i \Leftrightarrow m_{B_i}(x) \mid f(x)\ \forall i \Leftrightarrow [m_{B_1}(x), \dots, m_{B_k}(x)] \mid f(x)$, tehát A minimálpolinomja $m_A(x) = [m_{B_1}(x), \dots, m_{B_k}(x)]$.

c) A teljes mátrixra alkalmazva a $B_1, \dots, B_k$ elemi sorműveleteit, lépcsős alakra hozhatjuk a diagonális blokkokat. Ez az alak, a közbeékelődő $\mathbf{0}$ soroktól eltekintve az egész mátrixnak is lépcsős alakja lesz (azaz a $\mathbf{0}$ sorokat az aljára mozgatva lépcsős lesz), tehát az A lépcsős alakjában a nemnulla sorok száma éppen a B_i-k lépcsős alakjában szereplő nemnulla sorok számának összege. Azaz $r(A) = \sum\limits_i r(B_i)$.

Legyen A felső blokkháromszög-mátrix, $B_1, \dots, B_k$ diagonális blokkokkal.
$k_A(x) = k_{B_1}(x) \cdots k_{B_k}(x)$, mivel blokkháromszögmátrix determinánsa is a diagonális blokkok determinánsának szorzata.
A minimálpolinomra már nem igaz a blokkdiagonális esetben érvényes összefüggés, de annyi igen, hogy

$$g(x) = [m_{B_1}, \dots, m_{B_k}]\text{-re } g(x) \mid m_A(x) \mid g(x)^k,$$

ugyanis $m_A(A) = 0$ miatt $m_A(B_i) = 0$ minden i-re (a háromszögmátrix hatványainak, illetve polinomjainak a diagonális blokkjai a megfelelő diagonális blokkok hatványai, illetve polinomjai), így $m_{B_i}(x) \mid m_A(x)$ minden i-re, ezért $g(x) \mid m_A(x)$. Másrészt $g(B_i) = 0$ miatt $g(A)$ minden diagonális blokkja 0, vagyis $g(A)$ a blokkháromszög-felbontáshoz tartozó $V_1 \le V_2 \le \dots \le V = K^n$ invariáns altérsorozat tagjait az eggyel kisebb indexű altérbe viszi, így $g(A)^k$ mindegyiket nullába viszi, azaz $g(A)^k = 0$, amiből $m_A(x) \mid g(x)^k$.
Ami a rangot illeti, $r(A) \ge \sum r(B_i)$ nyilván igaz, mert a B_i-k lépcsős alakjához tartozó B_i-ben nemnulla sorok itt is függetlenek, mint a blokkdiagonális esetben (a megadott sorrendben lépcsős mátrixot alkotnak), de a nullává tett sorai nem feltétlenül válnak nullává, így a rang lehet a rangok összegénél nagyobb is. Például

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ rangja 3,} \quad r(B_1) + r(B_2) = 1 + 1 = 2.$$

4. *Bizonyítsuk be (testbővítésre való hivatkozás nélkül), hogy tetszőleges test fölötti négyzetes mátrixra van olyan $k \in \mathbb{N}^+$, amelyre $m_A(x) \mid k_A(x) \mid m_A(x)^k$.*
(Útmutatás: Lássuk be, hogy A vagy hasonló egy kísérő mátrixhoz, vagy hasonló egy valódi blokkháromszög-mátrixhoz.)

Megoldás: Azt tudjuk, hogy $m_A(x) \mid k_A(x)$, csak a másik oszthatóságot kell bizonyítani. Ehhez a mátrix méretére vonatkozó teljes indukciót használunk.
Legyen $A \in K^{n \times n}$, és tegyük fel, hogy kisebb méretű mátrixokra igaz az állítás. Vegyünk egy $\mathbf{0} \ne \mathbf{v} \in K^n$ vektort. Legyen k maximális, amelyre $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}, A\mathbf{v}, A^2\mathbf{v}, \dots, A^{k-1}\mathbf{v}\}$ független. Nyilván $k = |\mathcal{B}| \le \dim K^n = n$.
Ha $k = n$, akkor $I, A, \dots, A^{n-1}$ lineárisan függetlenek, így a minimálpolinom n-edfokú, amiből $k_A(x) = (-1)^n m_A(x) \mid m_A(x)$ következik. (Ekkor az A mátrix a $\mathcal{B}$ bázisban kísérőmátrix.)
Ha $k < n$, akkor tekintsük az $U = \mathrm{span}(\mathcal{B}) \le K^n$ alteret. Ez A-invariáns, mert $A(A^{k-1}\mathbf{v}) = A^k\mathbf{v} \in \mathrm{span}(\mathcal{B})$ a k maximalitása miatt, $\mathcal{B}$ többi elemének képe A-nál pedig $\mathcal{B}$-beli. Ha $K^n = U \oplus W$, akkor egy ehhez a felbontáshoz tartozó bázisban a transzformáció mátrixa felső blokkháromszög-mátrix: $A \sim \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$. A B és D mátrixokra az indukciós feltevés miatt alkalmas k-ra $k_B(x) \mid m_B(x)^k$ és $k_D(x) \mid m_D(x)^k$ (k a nagyobbik az állítás szerint létező kitevők közül). Az előző feladatból tudjuk, hogy $k_A(x) = k_B(x)k_D(x)$ és $[m_B(x), m_C(x)] \mid m_A(x)$. Így

$$k_A(x) = k_B(x)k_D(x) \mid m_B(x)^k m_D(x)^k \mid m_A(x)^k m_A(x)^k = m_A(x)^{2k}.$$

5. *Mi lehet a Jordan-féle normálalakja annak a komplex mátrixnak, amelynek a*

a) karakterisztikus polinomja $(x-1)^6$, minimálpolinomja $(x-1)^4$, az 1-hez tartozó V_1 sajátaltér dimenziója 2;
b) karakterisztikus polinomja $-(x-\lambda)^7$, minimálpolinomja $(x-\lambda)^3$, $\dim(V_\lambda)=3$, ahol V_λ a λ sajátértékhez tartozó sajátaltér?

Megoldás: a) 6×6-os mátrix, amelynek csak 1 a sajátértéke, és a Jordan-normálalakjában a legnagyobb blokk 4×4-es, és összesen két Jordan-blokkja van, tehát a Jordan-normálalak egy 4×4-es és egy 2×2-es 1-blokkot tartalmaz.

b) Ez egy 7×7-es mátrix, amelynek egyetlen sajátértéke a λ, legnagyobb Jordan-blokkja 3×3-as, és összesen három Jordan-blokkja van. 7-nek két ilyen felbontása is van: $7=3+3+1$ vagy $7=3+2+2$, tehát kétféle Jordan-alak is lehetséges:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

6. *Mi az alábbi mátrixok Jordan-féle normálalakja?*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Az első mátrix diagonalizálható (már csak azért is, mert valós szimmetrikus). Mivel minden sorösszege 5, a mátrixnak sajátértéke az 5 az $(1,1,1,1,1)$ sajátvektorral. A mátrix rangja 1, ezért a 0 is sajátértéke 4-dimenziós sajátaltérrel. Így a mátrix diagonális (és akkor Jordán-féle) alakja $\operatorname{diag}(5,0,0,0,0)$.

A második mátrix sajátértékei 2 és -5, és a 2-höz tartozó sajátaltér csak 1-dimenziós, tehát a mátrix nem diagonalizálható, és így a Jordan-alakja

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

A harmadik mátrix egyetlen sajátértéke a 2, és $\dim V_2 = 1$, ezért a Jordan-normálalakja egyetlen blokkból áll:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

A negyedik mátrix ortogonális, tehát diagonalizálható. A karakterisztikus polinomja $-(x^3-1)$, ezért a sajátértékei $1, \varepsilon, \varepsilon^2$, ahol $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$. A Jordan-normálalakja $\operatorname{diag}(1,\varepsilon,\varepsilon^2)$.

7. *Hasonlóság erejéig hány olyan komplex mátrix van, melynek*
a) karakterisztikus polinomja $-(x-1)^3(x-3)^4$;
b) minimálpolinomja $(x+2)^6$, és sajátaltere 2-dimenziós?

Megoldás: a) A Jordan-normálalakban az 1-blokkok méretének megoszlása lehet 3, $2+1$ vagy $1+1+1$, a 3-blokkoké 4, $3+1$, $2+2$, $2+1+1$ vagy $1+1+1+1$. Ez összesen $3\cdot 5 = 15$ lehetőség.

b) A mimimálpolinomból következik, hogy a mátrix egyetlen sajátértéke -2, és a legnagyobb Jordan-blokkja 6×6-os. A sajátaltér dimenziója miatt pedig csak két Jordan-blokk lehet, így a kisebbiknek a mérete $1,2,3,4,5$ vagy 6 lehet, ez összesen 6 lehetőség.

8. *Mutassuk meg, hogy ha két 3×3-as vagy 2×2-es komplex mátrix karakterisztikus polinomja és minimálpolinomja megegyezik, akkor a két mátrix hasonló.*

Megoldás: A karakterisztikus polinomban minden $(x - \lambda)$ gyöktényező kitevője legföljebb $a = 3$, a minimálpolinomban ezért csak 1, $a - 1$ vagy a lehet. A Jordan-normálalakban az első esetben minden λ-blokk 1×1-es, a másodikban van egy $(a - 1) \times (a - 1)$-es λ-blokk, és akkor azon kívül már csak egy 1×1-es lehet, a harmadikban pedig egyetlen $a \times a$-as λ-blokk van. Tehát ilyen méretű mátrixokra a karakterisztikus polinom és a minimálpolinom meghatározza a Jordan-normálalakot, így ezek között az azonos karakterisztikus és minimálpolinommal rendelkező mátrixok Jordan-normálalakja megegyezik, vagyis az ilyen mátrixok hasonlók egymáshoz.
(4×4-esre ez már nem igaz: például $k_A(x) = (x - 1)^4$ és $m_A(x) = (x - 1)^2$ igaz a $2 + 2$-es és a $2 + 1 + 1$-es felbontású, 1 sajátértékhez tartozó Jordan-mátrixra is.)

9. *Mi lehet az A^2 mátrix minimálpolinomja, ha $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ minimálpolinomja $(x + 1)^2$?*

Megoldás: Ha $(A + I)^2 = O$, akkor $(A + I)^2 (A - I)^2 = (A^2 - I)^2 = O$, így A^2 minimálpolinomja osztója az $(x - 1)^2$ polinomnak. Viszont $x - 1$ nem lehet, mert ha $A^2 - I = O$ lenne, akkor A minimálpolinomja osztója lenne $(x^2 - 1)$-nek. Tehát A^2 minimálpolinomja $(x - 1)^2$.

Másképp: A Jordan-alakjában, $\mathcal{J}(A)$-ban csak 2×2-es és 1×1-es -1-blokkok vannak (és van legalább egy 2×2-es). $\mathcal{J}(A)^2$ diagonális blokkjai $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ és $[\,1\,]$ alakúak, tehát 1 az egyetlen sajátértéke, és $(\mathcal{J}(A)^2 - I)$-nek a négyzete O, de maga nem, tehát $\mathcal{J}(A)^2$-nek és így a hozzá hasonló A^2-nek is a minimálpolinomja $(x - 1)^2$.