

1. Legyen  $A$   $10 \times 10$ -es valós mátrix! Jelölje  $r_i$  az  $A^i$  rangját! Lehet-e az  $(r_1, r_2, \dots)$  sorozat egyenlő az alábbiakkal?

- a)  $(5, 6, \dots)$ ;  
 b)  $(9, 8, 7, \dots, 4, 4, \dots)$ ;

Megoldás: a) Ez a rangsorozat nem lehetséges, mert  $\text{Im } A^{k+1} \leq \text{Im } A^k$  minden  $k$ -ra, tehát a rangoknak is csökkenniük kellene, itt viszont az 5 után 6 következik.

b) Ilyen rangsorozatot kaphatunk, ha egy olyan Jordan-mátrixot veszünk, amelynek egyetlen 0-blokkja van, így ennek a hatványozásánál mindig 1-gyel csökken a rang, amíg 0-vá nem válik a blokk. Ez a rangsorozat szerint akkor következik be, amikor a rang 4, ezért a 0-blokk  $6 \times 6$ -os. Ezt a 0-blokkot kiegészíthetjük tetszőleges invertálható diagonális blokkal, például egy  $4 \times 4$ -es egységmátrixszal.

2. Egy  $10 \times 10$ -es  $A$  mátrix sajátértékei  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ . Az  $A - \lambda_1 I$  hatványainak rangja rendre 8, 6, 5, 4, 4. Az  $A - \lambda_2 I$  hatványainak rangja rendre 7, 6, 6. Írjuk fel  $A$  Jordan-féle normálalakját!

Megoldás: Írjuk fel egy táblázatba a rangok sorozatát (a nulladik hatvánnyal, tehát az egységmátrixszal kezdve). Ekkor a második differenciasorozat adja meg az adott sajátértékhez tartozó adott méretű Jordan-blokkok számát.

$k$	0	1	2	3	4	5
$r((A - I)^k)$	10	8	6	5	4	4
$d_k$		2	2	1	1	0
$n_k$		0	1	0	1	

  

$k$	0	1	2	3
$r((A - 2I)^k)$	10	7	6	6
$d_k$		3	1	0
$n_k$		2	1	

Tehát a Jordan-alakban egy  $4 \times 4$ -es és egy  $2 \times 2$ -es 1-blokk, és egy  $2 \times 2$ -es és két  $1 \times 1$ -es 2-blokk van. Azaz  $\mathcal{J}(A) = \text{diag}(J_1, J_2, J_3, J_4, J_5)$ , ahol

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad J_4 = [2], \quad J_5 = [2]$$

3. Bizonyítsuk be, hogy ha  $K \leq L$  végtelen testek, és  $A, B \in K^{n \times n}$  hasonlók mint  $L$  fölötti mátrixok, akkor  $K^{n \times n}$ -ben is hasonlók!

Megoldás:  $A$  és  $B$  akkor hasonlók, ha van olyan  $P$  invertálható mátrix, amelyre  $P^{-1}AP = B$ , azaz  $AP = PB$ . Ez a  $P$   $n^2$  darab ismeretlen elemére egy lineáris egyenletrendszer, amelynek általános megoldása valahány  $K$ -beli vektor (valójában mátrix) paraméter-együtthetős lineáris kombinációja. A feltétel, hogy  $P$  invertálható, azt jelenti, hogy  $|P| \neq 0$ , és  $P$  determinánsa a paramétereknek  $K$  fölötti többváltozós polinomja. Azt kell tehát belátnunk, hogy ha ennek a polinomnak van olyan  $L$ -beli behelyettesítési értéke, ami nem 0, akkor a paraméterekbe alkalmas  $K$ -beli elemeket is be tudunk helyettesíteni úgy, hogy az értéke ne legyen 0.

Legyen  $f(x_1, \dots, x_k) \in K[x]$ , és tegyük fel, hogy valamely  $a_1, \dots, a_k \in L$  elemekre  $f(a_1, \dots, a_k) \neq 0$ . A változók számára vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy ekkor van olyan  $b_1, \dots, b_k \in K$ , hogy  $f(b_1, \dots, b_k) \neq 0$ .  $n = 1$ -re igaz: egy  $m$  fokú egyváltozós nemnulla polinomnak legföljebb  $m$  gyöke lehet, és  $K$  végtelen. Tegyük fel, hogy  $(k - 1)$ -változós polinomra igaz az állítás.  $f$ -et felírhatjuk  $x_k$ -nak  $K[x_1, \dots, x_{k-1}]$  fölötti polinomjaként, amelynek nem minden együtthatója azonosan nulla  $L$  fölött, mert akkor  $L$  fölött sem lenne nemnulla behelyettesítés. Tehát valamelyik együtthetős az indukciós feltevés szerint van  $(b_1, \dots, b_{k-1})$ -gyel való  $K$ -beli nemnulla értékű behelyettesítése. Tekintsük a  $g(x_k) = f(b_1, \dots, b_{k-1}, x_k)$  egyváltozós polinomot. Mivel ez nem az azonosan nulla polinom, csak véges sok gyöke lehet  $K$  fölött is, és így van olyan  $b_k \in K$ , amelyre  $f(b_1, \dots, b_k) = g(b_k) \neq 0$ .

Megj.: Véges testekre is igaz az állítás, csak ez a bizonyítás arra az esetre nem működik.

4. Bizonyítsuk be, hogy minden négyzetes mátrix hasonló a transzponáltjához!

Megoldás: Legyen  $A \in K^{n \times n}$ , és  $L \geq K$  egy bővebb test, amelyben  $k_A(x)$  lineáris faktorokra bontható. Ekkor  $L$ -ben van  $A$ -nak Jordan-normálalakja. Az előző feladat szerint elég belátni, hogy  $A \sim A^T$  az  $L$  fölött. Legyen  $A \sim J = \text{diag}(J_1, \dots, J_k)$  az  $A$  Jordan-normálalakja a  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{B}_k$  bázisra való áttéréssel. Legyen  $\mathcal{B}'_i$  a  $\mathcal{B}_i$  fordított sorrendben. Ekkor az  $A$  mátrix a  $\mathcal{B}' = \mathcal{B}'_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{B}'_k$  bázisban  $J^T$ , tehát  $J^T \sim J$ . Legyen  $A = PJP^{-1}$  és  $J^T = QJQ^{-1}$ . Ekkor  $A^T = (P^{-1})^T J^T P^T = (P^{-1})^T QJQ^{-1} P^T = (Q^{-1} P^T)^{-1} J (Q^{-1} P^T) \sim J \sim A$ .

5. Határozzuk meg az alábbi mátrixok Jordan-féle normálalakját, és adjuk meg egy Jordan-bázisát!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Megoldás:  $k_A(x) = (x - 2)^2(x - 1)^2$ .

$r(A - 2I) = 3 \Rightarrow \dim V_2 = 4 - 3 = 1 \Rightarrow \mathcal{J}(A)$ -ban egy 2-blokk van, és így ez  $2 \times 2$ -es.

$r(A - I) = 2 \Rightarrow \dim V_1 = 4 - 2 = 2 \Rightarrow \mathcal{J}(A)$ -ban két 1-blokk van, és így ezek  $1 \times 1$ -esek. Tehát

$$\mathcal{J}(A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A  $\lambda = 2$ -höz egyetlen 2 hosszúságú Jordan-láncot kell keresnünk, mert egyetlen  $2 \times 2$ -es Jordan-blokk van. Először  $(A - \lambda I)^i$  magterének,  $K_i$ -nek a bázisát kell megtalálnunk (most  $i = 1, 2$ -re). Aztán az  $i$  csökkenő rendjében (az alábbiakban jobbról balra) a  $K_i$  bázisából a jobbról érkező Jordan-láncok  $K_i$ -beli elemei és a  $K_{i-1}$  báziselemei által generált altérhez kiegészítő báziselemeket választani (ezt bonyolultabb esetben Gauss-eliminációval végezhetnénk).

A  $K_i$  magtér meghatározásához  $(A - \lambda I)^i$  redukált lépcsős alakjára van szükségünk:  $L_i$ . Ezután az  $(A - \lambda I)^{i+1}$  redukálásához elég az  $L_i(A - \lambda I)$  alakból kiindulnunk, mert ha  $L_i = P(A - \lambda I)^i$  valamely invertálható  $P$ -re, akkor az  $L_i(A - \lambda I) = P(A - \lambda I)^{i+1}$  mátrixot is megkaphatjuk az  $(A - \lambda I)^{i+1}$  mátrixból ugyanazokkal az elemi sorműveletekkel. Az egyenletrendszerből kihagyhatjuk a  $\mathbf{0}$  sorokat, s mivel ezek a jobbról szorzásnál továbbra is  $\mathbf{0}$  sorokba mennének, ez nem változtat a későbbi egyenletrendszerek megoldásán. (A Jordan-láncok előállításához nem kell előre meghatározni a Jordan-normálalakot: addig folytatjuk a hatványozást, amíg még csökken a mátrix rangja, vagy egyszerűbben, amíg a magtér dimenziója, azaz  $n - (\text{a rang})$  el nem éri a  $\lambda$  algebrai multiplicitását.

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot(A-2I)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_1 : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad K_2 : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jordan-lánc(ok)  $\lambda = 2$ -höz:

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xleftarrow{(A-2I)} \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A  $\lambda = 1$ -hez tartozó általánosított sajátvektorok mind sajátvektorok, tehát a Jordan-láncok itt 1-eleműek, a  $V_1$  bázisát kell csak meghatározni.

$$A - I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tehát a Jordan-bázis a fenti vektorokból  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4\}$ .

$B$  egyetlen sajátértéke a 3.

$$B-3I = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot(B-3I)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_1 : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad K_2 : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jordan-lánc(ok)  $\lambda = 3$ -hoz:

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xleftarrow{(B-3I)} \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \xleftarrow{(B-3I)} \mathbf{b}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A Jordan-bázis a fent kapott  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4\}$ , és a Jordan-normálalak két  $2 \times 2$ -es 3-blokkból áll:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

6. Határozzuk meg az alábbi mátrix karakterisztikus és minimálpolinomját! Bontsuk fel a minimálpolinomot relatív prím faktorokra  $\mathbb{R}$  fölött, és hozzuk a mátrixot ennek a felbontásnak megfelelő blokkdiagonális alakra! Mi a mátrix  $\mathbb{C}$  fölötti Jordan-normálalakja?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Megoldás:  $k_A(x) = (4-x)(x^2+4)$ .  $\mathbb{C}$ -ben ennek minden gyöke különböző  $\Rightarrow \deg m_A(x) = 3 \Rightarrow m_A(x) = (x-4)(x^2+4)$ , és a két tényező relatív prím (és irreducibilis  $\mathbb{R}$  fölött).

$\text{Ker}(A-4I) = ?$

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Ker}(A-4I) = \text{span}(\mathbf{e}_3)$$

$\text{Ker}(A^2+4I) = ?$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 20 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Ker}(A^2+4I) = \text{span}((-1, 2, 0), (-5, 0, 2))$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 10 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\mathbb{C}$  fölött a sajátértékek  $4, \pm 2i$ , tehát ott  $A$  diagonalizálható, és a diagonális alakja, és így a Jordan-normálalakja is  $\text{diag}(4, 2i, -2i)$ .

7. Igazoljuk, hogy minden invertálható komplex mátrixnak van négyzetgyöke! Mutassuk meg, hogy szinguláris mátrixokra ez nem feltétlenül igaz! Adjuk meg az  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  mátrix valamelyik négyzetgyökét!

*Megoldás:* Elég a reguláris Jordan-blokkokra belátni az állítást, ugyanis akkor egy teljes Jordan-mátrixból is lehet négyzetgyököt vonni (minden diagonális blokkot egy négyzetgyökével helyettesítve), és akkor a  $J = P^{-1}AP$  Jordan-normálalak  $M$  négyzetgyökével  $A = PJP^{-1} = PM^2P^{-1} = (PMP^{-1})^2$ .

Legyen  $J$  egy  $n \times n$ -es  $\lambda$ -blokk, és  $\mu^2 = \lambda$ . Ha  $N$  egy  $n \times n$ -es  $\mu$ -blokk, akkor  $N^2$  átlójában  $\lambda$ , fölötté  $2\mu$ , fölötté 1-ek vannak, mindenhol máshol 0. Mivel  $\mu \neq 0$ , az  $N^2 - \lambda I$  mátrix lépcsős alakú,  $(n-1)$  rangú, ezért  $N^2$  Jordan-normálalakja egy  $n \times n$ -es  $\lambda$ -blokk, azaz van olyan invertálható  $P$ , amelyre  $P^{-1}N^2P = J$ , vagyis  $J = (P^{-1}NP)^2$ .

Szinguláris mátrixból viszont nem feltétlenül lehet négyzetgyököt vonni. Például az  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  mátrixnak nem lehet négyzetgyöke, mert ha lenne, annak is csak 0 lehetne a sajátértéke, így minimálpolinomja csak  $x$  vagy  $x^2$  lehetne, de akkor annak a négyzete 0 lenne, és nem  $A$ .

Az előbbieken láttuk, hogy a  $B = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$  Jordan-blokk négyzete hasonló az  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  Jordan-blokkhoz, csak most a hasonlóság mátrixát is meg kell adni.

$B^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $B^2 - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\text{Ker}(B^2 - 2I) = \text{span}(\mathbf{e}_1)$ ,  $\text{Ker}(B^2 - 2I)^2 = \text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ ,

így  $\mathbf{e}_2$  egy 2 hosszúságú  $(2\sqrt{2}, 0) \xleftarrow{B^2-2I} (0, 1)$  Jordan-láncot generál. Így a  $P = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  áttérési

mátrixszal  $(P^{-1}BP)^2 = P^{-1}B^2P = A$ , vagyis  $A$  négyzetgyöke  $P^{-1}BP = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ .

8. Hasonlóság erejéig hány olyan  $3 \times 3$ -as komplex mátrix van, amelynek a négyzete megegyezik a köbével?

*Megoldás:* Tegyük fel, hogy  $A \in M_3(\mathbb{C})$ , és  $A^3 = A^2$ . Ekkor  $A$  minimálpolinomja osztója az  $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$  polinomnak. Ebből következik, hogy  $A$  sajátértékei csak 0 vagy 1 lehetnek. Ha  $A$  diagonalizálható, akkor a Jordan-normálalakja diagonális, 1-ekkel és/vagy 0-kkal az átlóban. Mivel a hasonlósági osztályokban a Jordan-blokkok sorrendje változtatható, csak az számít, hogy hány 1 és hány 0 van az átlóban: ez négy lehetőség. Ha  $A$  nem diagonalizálható, akkor a minimálpolinomnak van többszörös gyöke, és ez az  $m_A(x) \mid x^2(x-1)$  miatt csak a 0 lehet. Tehát a minimálpolinom vagy  $x^2$ , vagy  $x^2(x-1)$ . Az első esetben a karakterisztikus polinom csak  $-x^3$  lehet, és a Jordan-normálalak egy  $2 \times 2$ -es és egy  $1 \times 1$ -es 0-blokkból áll, a másodikban a karakterisztikus polinom  $-x^2(x-1)$ , és a Jordan-normálalak egy  $2 \times 2$ -es 0-blokkból és egy  $1 \times 1$ -es 1-blokkból áll. Tehát hasonlóság erejéig hat olyan mátrix van, amelynek a köbe megegyezik a négyzetével, és ezek Jordan-normálalakja

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

9. Határozzuk meg az alábbi  $A$  mátrix Jordan-normálalakját és Jordan-bázisát, majd ennek a segítségével számítsuk ki az  $A^n$  hatványokat!

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

*Megoldás:*  $k_A(x) = -x^3 + 3x^2 - 2 - 6 - 2x + 9 - 3x + 2x = -(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = -(x-1)^3$ . Tehát  $A$  egyetlen sajátértéke az 1.

$$A - I = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

miatt  $\dim V_1 = 1$ , vagyis a  $J$  Jordan-normálalak egyetlen Jordan-blokkból áll. A Jordan-bázis így egyetlen Jordan-lánc, és bármely olyan vektor generálhatja, amelyet az  $A - \lambda I$ -nek csak a harmadik hatványa viszi nullába, s mivel minden vektor általánosított sajátvektor az 1-hez, elég egy tetszőleges olyan vektort választani, amely nincs benne a  $\text{Ker}(A - I)^2$  altérben.

$$(A - I)^2 \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \mapsto [1 \quad -1/2 \quad 1/2]$$

Így  $\text{Ker}((A - I)^2) = \text{span}((1, 2, 0), (-1, 0, 2))$ , és  $\mathbf{v} = (1, 0, 0)$  ezen kívül van. A  $\mathbf{v}$  által generált Jordan-lánc

$$(4, 0, -8) \xleftarrow{A-I} (2, 2, -2) \xleftarrow{A-I} (1, 0, 0).$$

Tehát

$$A^n = P J^n P^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -8 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & n & \binom{n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 8 & -4 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4n+2 & 2n^2+1 \\ 0 & 2 & 2n \\ -8 & -8n-2 & -4n^2+2n \end{bmatrix} \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 8 & -4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2n^2+1 & -n^2+2n & n^2 \\ 2n & -n+1 & n \\ -4n^2+2n & 2n^2-5n & -2n^2+n+1 \end{bmatrix}$$

*Megjegyzés:*  $A^n$ -et Hermite-interpolációval is ki tudjuk számítani, a Jordan-normálalak és a Jordan-bázis meghatározása nélkül: az  $f(x) = x^n$ -re kell megkeresni azt a  $p(x) = a + bx + cx^2$  polinomot, amelyre  $f(1) = p(1)$ ,  $f'(1) = p'(1)$  és  $f''(1) = p''(1)$ , és ekkor  $A^n = p(A)$ .

**Házi feladatok**

Beadási határidő: május 22.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni. Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Legyen  $A$   $10 \times 10$ -es valós mátrix! Jelölje  $r_i$  az  $A^i$  rangját! Lehet-e az  $(r_1, r_2, \dots)$  sorozat egyenlő az alábbiakkal?
  - a)  $(10, 9, 8, \dots)$ ;
  - b)  $(8, 5, \dots)$ .
2. Egy  $10 \times 10$ -es  $A$  mátrix sajátértékei  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 5$ . Az  $A - \lambda_1 I$  hatványainak rangja rendre 8, 7, 6, 6. Az  $A - \lambda_2 I$  hatványainak rangja rendre 7, 5, 4, 4. Írjuk fel  $A$  Jordan-féle normálalakját!
3. Határozzuk meg az alábbi mátrix Jordan-féle normálalakját, és adjuk meg egy Jordan-bázisát!

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

4. Legyen  $J$  a 3. feladatban kiszámolt Jordan-mátrix. Írjuk fel a  $J^{10}$ , és ebből az  $A^{10}$  mátrixot, továbbá ezek (nyilván megegyező) Jordan-normálalakját!
5. Hasonlóság erejéig hány olyan  $3 \times 3$ -as komplex mátrix van, amelynek a négyzete megegyezik a negyedik hatványával?
6. Vonjunk négyzetgyököt a  $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  mátrixból  $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ -ben! Létezik-e valós négyzetgyöke?
- 7\*. Van-e olyan  $3 \times 3$ -as valós, 0 nyomú  $A$  mátrix, amelyre  $A^2 + A^T = I$ ?