1. *Hermite-interpolációval számítsuk ki az* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ *mátrixra az* e^{2A} *értékét!*

Megoldás: $k_A(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$, és $m_A(x) = (x-2)^2$. Az $f(e^{2x})$ függvényt egy $p(x) = a + bx$ legföljebb elsőfokú polinommal interpolálhatjuk.

$$\begin{array}{ccc} p(x) = a + bx & f(x) = e^{2x} & p(2) = a + 2b = e^4 \\ p'(x) = b & f'(x) = 2e^{2x} & p'(2) = b = 2e^4 \end{array}$$

Így $a = -3e^4$, $b = 2e^4$, és

$$e^{2A} = -3e^4 I + 2e^4 A = e^4 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

2. *Adjuk meg az alábbi A mátrix négyzetgyökét Hermite-interpoláció segítségével!*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Megoldás: $k_A(x) = -(x-1)^2(x-4), \quad m_A(x) = (x-1)^2(x-4), \quad f(x) = \sqrt{x}$

$$\begin{array}{ccc} p(x) = a + bx + cx^2 & f(x) = \sqrt{x} & p(1) = a + b + c = 1 \\ p'(x) = b + 2cx & f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} & p'(1) = b + 2c = \frac{1}{2} \\ & & p(4) = a + 4b + 16c = 2 \end{array}$$

$\Rightarrow c = -\frac{1}{18},\ b = \frac{11}{18},\ a = \frac{4}{9} \Rightarrow p(x) = \frac{1}{18}(8 + 11x - x^2)$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad \sqrt{A} = \frac{1}{18}(8I + 11A - A^2) = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/18 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3. *Az* $a, b \in \mathbb{C}$ *milyen értékeire konvergens az* A^k *sorozat? Mikor tart a nullmátrixhoz?*

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ a & b & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás: $k_A(x) = -x(x-a)^2 \Rightarrow \rho(A) = |a|$. Tehát $A^n \to O \Leftrightarrow |a| < 1$.
Ezen kívül A^n akkor lehet konvergens, ha $a = 1$, feltéve, hogy az a geometriai multiplicitása megegyezik az algebrai multiplicitásával, azaz 2-vel.

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & b & -1 \end{bmatrix}$$

rangja csak $b = 0$ esetén 1, tehát A^n konvergens $\Leftrightarrow$ vagy $|a| < 0$, vagy $a = 1$ és $b = 0$.

4. *Adjunk explicit képletet az* $x_{n+3} = 5x_{n+2} - 8x_{n+1} + 4x_n$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 5$ *rekurzív sorozat n. tagjára!*

Megoldás: A rekurzió karakterisztikus polinomja $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x^2 - 4x + 4) = (x-1)(x-2)^2$, ezért a sorozat tagjai $x_n = a \cdot 1^n + (b + cn) \cdot 2^n$ alakban írhatók. A kezdeti feltételekből $a + b = 0$, $a + 2b + 2c = 1$ és $a + 4b + 8c = 5 \Rightarrow a = 1$, $b = -1$, $c = 1 \Rightarrow x_n = 1 + (n-1)2^n$.

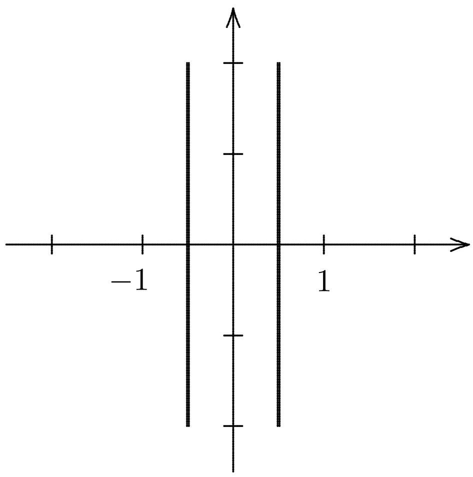
5. *Ábrázoljuk a* $\Big\{P \;\Big|\; |d(P,F_2)-d(P,F_1)|=1\Big\}$ *"hiperbolát", ha* $F_1=(1,0)$*,* $F_2=(-1,0)$*, és* d *az* 1*-norma, illetve a* ∞*-norma által indukált metrika* $\mathbb{R}^2$*-en.*

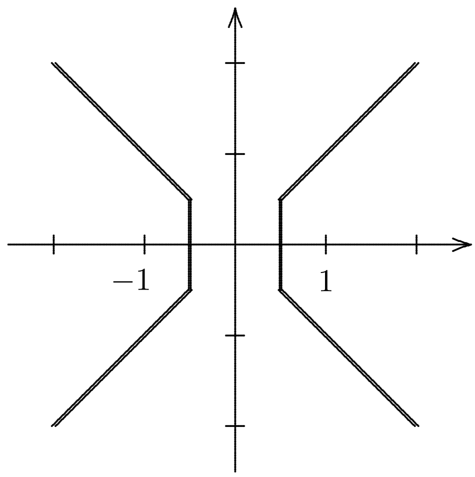
Megoldás: Elég a $d(P,F_2)-d(P,F_1)=1$ egyenletet megoldani, a $d(P,F_2)-d(P,F_1)=-1$ megoldása ennek az y tengelyre vett tükörképe.

1-normában az alakzatot az $|x+1|+|y|-(|x-1|+|y|)=1$, azaz $|x+1|-|x-1|=1$ egyenlet írja le. $|x+1|>|x-1| \Rightarrow (x+1)^2>(x-1)^2 \Rightarrow x>0$, így $|x+1|=x+1$. Ha $x\geq 1$, akkor az $x+1-(x-1)=1$ egyenlet ellentmondásos, tehát $0<x<1$, és az egyenlet $(x+1)-(1-x)=1$ alakú, aminek $x=\frac{1}{2}$ (és $y\in\mathbb{R}$ tetszőleges) a megoldása.

∞-normában az egyenlet $\max\{\,|x+1|,|y|\,\}-\max\{\,|x-1|,|y|\,\}=1$. A maximum nem lehet mindkét esetben az $|y|$, mert akkor 0 lenne a különbség. Ha mindkét esetben az x-es kifejezés a maximum, akkor az $|x+1|-|x-1|=1$ ($|y|\leq|x-1|$) adja a megoldást, és az 1-normában kapott egyenlet alapján ez $x=\frac{1}{2}$, $|y|\leq\frac{1}{2}$. Végül, ha a két tag közül csak az egyikben nagyobb az $|y|$, akkor az kisebb a másik x-es tagjánál, tehát csak úgy lehet 1 a különbség, ha $|x+1|\geq|y|\geq|x-1|$, és $|x+1|-|y|=1$. Ebből következik, hogy $|x+1|-|x-1|\geq 1$, tehát $x\geq\frac{1}{2}$ és $|y|=|x+1|-1=x$, azaz $y=\pm x$.

A két görbéhez a tükörképét is hozzátéve a következő alakzatokat kapjuk.





6. *a)* *Bizonyítsuk be, hogy ha* P *egy pont a síkon, és* e *egy egyenes, akkor* $\mathbb{R}^2$ *minden normája szerint van* e*-nek* P*-hez legközelebbi pontja (ennek a* P*-től való távolsága az* e *egyenes távolsága* P*-től).*

b) *Lássuk be, hogy a tengelyekkel párhuzamos egyenesektől való távolság minden* p*-normára megegyezik az euklideszi távolsággal*

c) *Határozzuk meg a* $P(1,1)$ *pont távolságát az* $e:\ y=2x$ *egyenestől az* 1*-,* 2*- és* ∞*-norma szerint. Melyik az* e *egyenes* P*-hez legközelebbi pontja ezekre a normákra nézve?*

Megoldás: a) Ha $\mathbf{v}=\mathbf{a}+t\mathbf{b}$ az egyenes egyenlete, és $\mathbf{c}$ a pont, akkor az $f(t)=\|\mathbf{a}+t\mathbf{b}-\mathbf{c}\|$ függvény folytonos, ugyanis

$$\begin{aligned}|f(t_2)-f(t_1)| &= \big|\,\|\mathbf{a}+t_2\mathbf{b}-\mathbf{c}\|-\|\mathbf{a}+t_1\mathbf{b}-\mathbf{c}\|\,\big| \\ &\leq \|(\mathbf{a}+t_2\mathbf{b}-\mathbf{c})-(\mathbf{a}+t_1\mathbf{b}-\mathbf{c})\| = \|(t_2-t_1)\mathbf{b}\| = |t_2-t_1|\cdot\|\mathbf{b}\|.\end{aligned}$$

Mivel a függvény alulról korlátos is, van minimuma.

b) Legyen $e:\ y=a$ egy x tengellyel párhuzamos egyenes, és $P(x_0,y_0)$. Ekkor

$$d(P,e)=\min_x\left(|x_0-x|^p+|y_0-a|^p\right)^{1/p}\geq\left(|y_0-a|^p\right)^{1/p}=|y_0-a|,$$

és ezt $x = x_0$-ra el is lehet érni. Ugyanígy igaz, hogy P-nek egy $e:\ x = a$ egyenestől vett távolsága $|x_0 - a|$.

c) 1-normára:

$$f(x) = |x-1| + |2x-1| = \begin{cases} 1 - x + 1 - 2x = 2 - 3x, & \text{ha } x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - x + 2x - 1 = x, & \text{ha } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ x - 1 + 2x - 1 = 3x - 2, & \text{ha } 1 \leq x \end{cases}$$

Az első szakaszon $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, a másodikon $\frac{1}{2}$, a harmadikon $f(1) = 1$ a minimum, tehát $d(P, e) = \frac{1}{2}$, és az e P-hez legközelebbi pontja $(\frac{1}{2}, 1)$.

Euklideszi normában az egyenesre állított merőleges talppontja, azaz $y = 2x$ és $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ metszéspontja, azaz $(\frac{3}{5}, \frac{6}{5})$ a legközelebbi pont, és $d(P, e) = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

∞-normában

$$\max\{\,|x-1|, |2x-1|\,\} = \begin{cases} \max\{\,1 - x, 1 - 2x\,\} = 1 - 2x, & \text{ha } x \leq 0 \\ \max\{\,1 - x, 1 - 2x\,\} = 1 - x, & \text{ha } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \max\{\,1 - x, 2x - 1\,\} = 1 - x, & \text{ha } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ \max\{\,1 - x, 2x - 1\,\} = 2x - 1, & \text{ha } \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \\ \max\{\,x - 1, 2x - 1\,\} = 2x - 1, & \text{ha } 1 \leq x \end{cases}$$

A minimum az egyes szakaszokon 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, 1, tehát $d(P, e) = \frac{1}{3}$, és a legközelebbi pont $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Házi feladatok

Beadási határidő: május 30.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni. Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. *Határozzuk az alábbi A mátrix Jordan-normálalakját, J-t, és írjuk fel az e^J és $\sqrt{J}$ mátrixokat!*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2. *Keressük meg azt a $p(x)$ Hermite-féle interpolációs polinomot, melyre $e^B = p(B)$ a következő mátrixra, és számítsuk ki ebből az e^B értékét!*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. *Állapítsuk meg az alábbi mátrixokról, hogy a hatványaik konvergensek-e, és ha igen, a nullmátrixhoz tartanak-e.*

$$A = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} \qquad B = \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/6 \end{bmatrix}$$

4. *Adjunk explicit képletet az $x_{n+3} = 6x_{n+2} - 12x_{n+1} + 8x_n$, $x_0 = 1$, $x_1 = x_2 = 4$ rekurzív sorozat n. tagjára!*

5. *Ábrázoljuk $\mathbb{R}^2$-ben a $(0,1)$ fókuszú és $y = -1$ vezéregyenesű "parabolát" az összeg-, illetve a maximummetrikára nézve (azaz adjuk meg azoknak a pontoknak a mértani helyét, amelyek az adott metrika szerint egyenlő távolságra vannak a fókuszponttól és a vezéregyenestől)!*

6. *Adjunk meg $\mathbb{R}^n$-ben*

a) $2n$ *pontot, amelyek az összegmetrikára és*

b) 2^n *pontot, amelyek a maximummetrikára nézve páronként egyenlő távolságra vannak egymástól.*

7*. *Bizonyítsuk be, hogy a maximummetrikára nézve $\mathbb{R}^n$-ben legföljebb 2^n olyan pont van, amelyeknek a páronkénti távolsága egyenlő!*