

Vizsgatematika – Bevezetés az algebrába 2 – 2022/23 tavaszi félév

Vektorterek **D** Vektortérxiómák, altér, generátorrendszer, függetlenség, bázis, dimenzió. **B** Minden vektortérnek van bázisa **T** független rendszer kiegészíthető, gen.rsz. leszűkíthető bázissá **D** Lineáris leképezés és transzformáció **B** Lineáris leképezések előírhatósági tétele **D** Magtér, képtér, injektív, szürjektív leképezések, izomorfizmus **T** Minden n -dimenziós, K fölötti vektortér izomorf K^n -nel **T** Dimenziótétel **D** Vektorok koordinátavektorai, lineáris leképezések és transzformációk mátrixa adott bázispárban, illetve bázisban **T** Áttérés másik bázispárra, illetve bázisra **B** Adott rangú lineáris leképezések kanonikus mátrixa **D** Mátrixok hasonlósága, **B** hasonlóságra invariáns tulajdonságok **D** Alterek összege, direkt összege **T** Direkt összeg ekvivalensei **T** Vetítések és mátrixaik jellemzése

Sajátérték, sajátvektor **D** Lineáris transzformáció, illetve mátrix sajátértéke, sajátvektora, karakterisztikus polinom **B** Sajátértékek és sajátvektorok meghatározása **D** Sajátaltér, invariáns altér **B** A sajátalterek összege direkt összeg **D** Algebrai és geometriai multiplicitás **B** Determináns = sajátértékek szorzata, nyom = sajátértékek összege **T** Diagonalizálható mátrixok jellemzése multiplicitásokkal **T** Spektrálfelbontás (sajátalterekre való projekciókkal) **T** Diagonalizálható mátrixok hatványozása **B** Gersgorin-körökről szóló tétel

Valós és komplex euklideszi terek **D** Skaláris szorzat \mathbb{R}^n és \mathbb{C}^n terekben **D** Valós és komplex euklideszi tér **D** Merőlegesség, vektor hossza, valós euklideszi terekben vektorok szöge. Ortogonális, ortonormált vektorrendszer **B** Minden véges dimenziós euklideszi térben van ONB (Gram–Schmidt-féle eljárás, valós és komplex eset) **T** n -dimenziós valós, illetve komplex euklideszi tér és \mathbb{R}^n , illetve \mathbb{C}^n kapcsolata **B** Ortonormált vektorrendszer független **B** CSB-egyenlőtlenség, **T** háromszög-egyenlőtlenség **D** Altér merőlegese **T** Véges dimenziós euklideszi térben $\mathcal{W} \oplus \mathcal{W}^\perp = \mathcal{V}$, $(\mathcal{W}^\perp)^\perp = \mathcal{W}$ **T** Ortog. bázissal megadott altérre való merőleges vetítés **D** Komplex mátrix adjungáltja,

Ortogonalis és unitér mátrixok és transzformációk

D Ortogonalis (unitér), szemiorthonális mátrixok **T** Ortogonalis (unitér) illetve szemiorthonális mátrix ekvivalens jellemzése **B** Ortogonalis (unitér) mátrix mátrixleképezésének jellemzése **D** Givens-forgatás, Householder-tükrözés **B** Teljes oszlopangú mátrix QR-felbontásának létezése és egyértelműsége (kiszámítása Givens-forgatásokkal, Householder-tükrözésekkel is) **B** Egyenletrendszer optimális megoldása QR-felbontás segítségével

Normális mátrixok **D** Szimmetrikus, ferdén szimmetrikus, önadjungált, ferdén önadjungált, normális mátrixok, és kapcsolatuk **T** Normális és speciális normális (önadjungált, ferdén önadjungált, unitér) mátrixok unitérrel vett konjugáltjai **B** Speciális normális mátrixok sajátértékei **B** Schur-felbontás **B** Spektráltétel: komplex normális mátrix unitér diagonalizálhatósága **T** Főtengelytétel (valós és komplex) **T** Speciális normális mátrixok jellemzése a diagonális alakjakkal

Kvadratikus alakok **D** Valós és komplex kvadratikus alak mátrixa **T** Áttérés másik bázisra **T** Kvadratikus alak diagonalizálhatósága (négyzetösszeg alak) a főtengelytétel segítségével, másodrendű görbék kanonikus alakra hozása

D Kvadratikus alak jellege **B** Jelleg és diag. alak / sajátértékek **T** Kvadratikus alak diagonalizálása szimultán sor- és oszlopműveletekkel **D** Főminorok **B** Kvadratikus alak jellegének meghatározása a főminorok segítségével **B** Valós pozitív szemidefinit mátrixok felbontása $\mathbf{C}^T \mathbf{C}$ alakban **B** Négyzetgyökvonás valós pozitív szemidefinit mátrixból **T** A pozitív definités mátrixfelbontásos ekvivalensei

Bilineáris függvények **D** Komplex és valós bilineáris függvények **D** Felírásuk adott bázisban, bilineáris függvény Gram-mátrixa **B** Báziscsere hatása a Gram-mátrixra **D** Szimmetrikus és Hermite-féle bilineáris függvények **T** Jellemzésük Gram-mátrixaikkal **B** Komplex bilineáris függvények és kvadratikus alakjaik közötti bijekció **T** Kvadratikus alak pontosan akkor valós értékű, ha a bilineáris függvény Hermite-féle **T** Valós szimmetrikus bilineáris függvények és a kvadratikus alakok közötti bijekció **B** Sylvester-féle tehetetlenségi tétel **D** szignatúra **B** Descartes előjelszabálya **T** és alkalmazása valós szimmetrikus mátrix karakterisztikus polinomjára

SVD **B** A^*A pozitív szemidefinit és $r(A)$ rangú **D** Mátrix szinguláris értéke, szinguláris vektorok **D** SVD (redukált, teljes) **B** SVD megkonstruálása, **T** kapcsolata a sor- és oszloptérrel **T** Σ egyértelműsége **T** SVD-ből pszeudo inverz **D** Poláris felbontás **B** Poláris felbontás létezése, invertálható esetben egyértelműsége **T** Eckart–Young-tétel

Minimálpolinom **D** Mátrix/transzformáció annulláló polinomja, minimálpolinom **B** Minimálpolinom osztója minden annulláló polinomnak **B** Minimálpolinom gyökei **T** Minimálpolinom egyértelműsége **B** Cayley–Hamilton-tétel **T** Hasonló mátrixok karakterisztikus és minimálpolinomja, sajátértékeik multiplicitásai megegyeznek

Jordan-féle normálalak **D** Invariáns altér **B** Mátrix felbontása blokkdiagonális alakra **T** Mátrix felbontása a minimálpolinom relatív prím faktorai szerint **T** Diagonalizálhatóság minimálpolinomos feltétele **D** Jordan-blokk, Jordan-mátrix, Jordan-lánc, Jordan-bázis **T** Jordan-féle normálalak létezése, és **B** egyértelműsége (Jordan-blokkok mérete rangsorozatokból) **T** Jordan-bázis meghatározása **D** Mátrixfüggvények **B** Az Hermite-interpoláció tétele **B** Jordan-blokk polinomja, függvénye **T** Mátrixfüggvény kiszámolása Jordan-alakkal és Hermite-interpolációval

Mátrixnormák **D** Vektornormák: p -, ∞ -, 1-norma **D** Mátrixnormák: Frobenius-, indukált, 1-, 2- (spektrális), ∞ -normák, és **T** ezek kiszámítása **D** Spektrálsugár **B** 2-norma = maximális szinguláris érték **B** Az Eckart–Young-tétel 2-normára

Alkalmazások **B** Mátrixhatvány konvergenciája **T** Homogén lineáris rekurziók és elsőrendű homogén differenciaegyenlet-rendszerek kapcsolata **T** Homogén lineáris rekurzióval megadott sorozat általános tagja **D** Gráfok szomszédsági mátrixa, spektruma, sajátvektorai **T** A szomszédsági mátrixból leolvasható gráftulajdonságok **B** páros gráf jellemzése a spektrummal **T** gráf spektrálsugarának alsó és felső becslése **T** a Petersen-gráf spektruma **B** A három Petersen-gráf tétele