1	2-8	9-12	13-	Σ

NÉV ____________________ **NEPTUNKÓD** __________

Bevezetés az algebrába 2 **1. vizsga – elmélet** **2023-06-07**

A tesztkérdésekre 20, a definíciók, tételek precíz megfogalmazására 10, a bizonyításos részre 10 pont kapható. A válaszokat írjuk a kérdéshez tartozó üres dobozba! Kidolgozási idő 60 perc. Segédeszköz nem használható!

1. Mindegyik állításról állapítsuk meg, hogy igaz vagy hamis (I|H)! *(6 pont)*

a) Egy vektortér két diszjunkt független részhalmazának uniója mindig független.

b) Egy altérre való vetítés mátrixának magtere és képtere csak a **0**-ban metszi egymást.

c) Minden 2×2-es, 1 rangú valós mátrix diagonalizálható.

d) Minden 4×4-es, ferdén önadjungált mátrix determinánsa valós.

e) Ha két $n \times n$-es komplex mátrix minimálpolinomja ugyanaz az n-edfokú polinom, akkor a két mátrix hasonló.

f) Ha $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ nem diagonalizálható, akkor az A^k $(k \in \mathbb{N})$ mátrixsorozat nem konvergens.

2. Legyen $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix. Nyilakkal jelezzük, melyik állításból következik valamelyik másik az alábbiak közül!
A: M normális
B: M diagonalizálható
C: $k_M(x)$-nek n különböző gyöke van *(2 pont)*

3. Mondjuk ki azokat a vektortér-axiómákat, amelyekben szerepel skalár is, és vektorok összeadása is. *(2 pont)*

4. Legyen $f : V \to W$ lineáris leképezés, $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ a V, és $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ a W bázisa. Ha $f(\mathbf{b}_1) = f(\mathbf{b}_3) = \mathbf{c}_1 + 2\mathbf{c}_2$, és $f(\mathbf{b}_2) = 0$, mi a $[f]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ mátrix utolsó sora? *(2 pont)*

5. Adjunk meg olyan 2×2-es valós mátrixot, amely normális, de nem diagonalizálható $\mathbb{R}$ fölött! *(2 pont)*

6. Az $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ halmaz melyik egy- vagy kételemű részhalmazai feszítenek ki invariáns alteret az alábbi A mátrixra nézve? *(2 pont)*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Ha egy 4×4-es mátrix minimálpolinomja $m(x) = (x-1)x^2$, az alábbiak közül melyik lehet a mátrix karakterisztikus polinomja? *(2 pont)*
(A) $k(x) = (x^2-1)x^2$ (B) $k(x) = (x-1)^2x^2$
(C) $k(x) = (x-1)^4$ (D) $k(x) = (x-1)x^3$

8. Mi egy $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ vektor ∞-normája? *(2 pont)*

9. Milyen tulajdonságokat kell kielégítenie egy mátrixnormának? *(3 pont)*

10. Definiáljuk egy $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ mátrix redukált SVD-felbontását! (A kiszámítási módszert nem kell megadni, csak hogy a szorzatban szereplő mátrixok milyen méretűek és tulajdonságúak!) *(3 pont)*

11. Definiáljuk az önadjungált komplex mátrixokat, és adjunk ekvivalens feltételt az önadjungáltságra a mátrix diagonális alakjával! *(2 pont)*

12. Mondjuk ki a háromszög-egyenlőtlenséget komplex euklideszi téren, az egyenlőség feltételével együtt! *(2 pont)*

13. Igazoljuk a a Schur-felbontás bizonyításából azt az állítást, hogy minden normális komplex háromszögmátrix diagonális. *(6 pont)*

14. Bizonyítsuk be, hogy $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$-re A^*A pozitív szemidefinit, és $r(A)$ rangú. *(4 pont)*