

E	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

NÉV _____

NEPTUNKÓD _____

Bevezetés az algebra 2

1. vizsga – gyakorlat

2022-06-07

Minden kérdésre írjuk a válaszokat a mellette lévő dobozba. Az első nyolc feladat mindegyike 2 pontot, a továbbiak 8 pontot érnek. A nyolcpontos feladatok megoldását részletesen írjuk le, külön lapon. Kidolgozási idő 110 perc.

E1. Mi a karakterisztikus és minimálpolinomja annak a 0 nyomú 4×4 -es mátrixnak, amelynek van három független sajátvektora a $\lambda = 1$ sajátértékhez?

E2. Mi az $(1, i, 1 + i)$ vektor merőleges vetülete a $(2i, 1, 1)$ vektorra?

E3. Milyen $a, b \in \mathbb{C}$ -re önadjungált az $A = \begin{bmatrix} a & a + b \\ 1 - i & bi \end{bmatrix}$ mátrix?

E4. Adjunk meg egy olyan 3×2 -es szemiortogonális mátrixot, amelynek első oszlopa a $(2, -1, 0)$ skalárszorosa.

E5. Ha $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, akkor mi a $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ bilineáris függvény mátrixa a $\{2\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ bázisban?

E6. Mi az A mátrix Jordan-normálalakja, ha $k_A(x) = x^5(x - 2)$, és A^k rangja $k = 1, 2, 3$ -ra rendre 3, 2, 1?

E7. Írjuk fel az alábbi polinom mátrixot mátrixegytűthetős polinomként!

$$\begin{bmatrix} x^2 - x + 2 & x - 1 \\ 3 & x^2 + 1 \end{bmatrix}$$

E8. Mi az 1-, ∞ - és 2-normája az $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ mátrixnak?

1. Legyen $f : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ a $p(x) \mapsto p(x) + (x+1)p(-1)$ transzformáció. Adjuk meg a transzformáció mátrixát a standard $\{1, x, x^2\}$ bázisban, határozzuk meg a sajátértékeit, és adjunk meg egy olyan polinomot, amelyik sajátvektor valamelyik sajátértékhez!

2. Adjuk meg az

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrix spektrálfelbontását és n -edik hatványát!

3. Döntsük el, hogy az alábbi mátrixok közül melyek diagonalizálhatók unitéren! Adjuk meg mindegyik mátrixnak a Jordan-féle normálalakját!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}$$

4. Határozzuk meg a $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy - 2xz + 2yz$ kvadratikus alak jellegét! Adjunk meg egy olyan nemnulla vektort (ha van), amelyen a kvadratikus alak nullát vesz fel.

5. Adjuk meg az $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix redukált SVD-felbontását és pszeudoinverzét!

6. Számítsuk ki (Gram-Schmidt-ortogonalizálással) az A mátrix redukált QR-felbontását.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

7. Hasonlóság erejéig hány olyan 10×10 -es mátrix van, amelynek a minimálpolinomja $(x-2)^2 x^3$, és a nyoma 8?

8. (Hermite-interpolációval) számítsuk ki az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$$

mátrix köbgyökét!