Alapismeretek csoportelméletből

Csoportok: elemi tulajdonságok

Definíciók: Csoport, Abel-csoport, ciklikus csoport, csoporthomomorfizmus, izomorfizmus, részcsoport, komplexusműveletek, generátum, elemrend ($o(g)$ vagy $|g|$ jelöléssel), mellékosztályok, index.

Állítások:
(1) $\emptyset \neq H \subseteq G$ *részcsoport* $\Leftrightarrow HH \subseteq H$, $H^{-1} \subseteq H$; *véges csoportnál elég:* $HH \subseteq H$.
(2) *Mellékosztályok jellemzése, pl.:* $a \in Hb \Leftrightarrow b \in Ha \Leftrightarrow Ha \cap Hb \neq \emptyset \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$ *stb.*
(3) $\varphi : G \to H$ *homomorfizmus* $\Rightarrow o(\varphi(g)) \mid o(g)$.

Tétel: (Lagrange) $H \leq G$ *és* G *véges* $\Rightarrow |H| \mid |G|$. *Vagy elemrendekre: ha* G *véges, akkor* $g \in G$*-re* $o(g) \mid |G|$.

Állítás: *A* C_n *ciklikus csoportnak minden* $d \mid n$ *esetén egyetlen* d *rendű részcsoportja van.*

****

Normálosztók, nevezetes részcsoportok

Definíciók: Normálosztó, konjugált (elemé: $h^g = g^{-1}hg$, részcsoporté: $H^g = g^{-1}Hg$), konjugáltosztály ($\{h^g \mid g \in G\}$), egyszerű csoport, faktorcsoport.

Állítás: *Normálosztók jellemzései:* $N \lhd G \Leftrightarrow N^g = N\ \forall g \in G \Leftrightarrow N^g \subseteq N\ \forall g \in G \Leftrightarrow Ng = gN\ \forall g \in G$

Állítás: *Normálosztó = homomorfizmus magja.*

Állítás: (Homomorfizmus-tétel) *Ha* $\varphi : G \to H$ *homomorfizmus, akkor* $\operatorname{Im}\varphi \cong G/\operatorname{Ker}\varphi$.

Állítás:
(1) (1. izomorfizmus-tétel) $N \lhd G$, $H \leq G$, *akkor* $H/H \cap N \cong HN/N$.
(2) (2. izomorfizmus-tétel) $K, N \lhd G$, $K \subseteq N$, *akkor* $G/N \cong (G/K)/(N/K)$.

Következmény: $N \lhd G$ *esetén kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés adható a* G/N *részcsoportjai és a* G*-nek* N*-et tartalmazó részcsoportjai között; ennél normálosztónak normálosztó felel meg.*

Definíciók: Normalizátor ($S \subseteq G$-re $N_G(S) := \{g \in G \mid S^g = S\}$),
centralizátor ($C_G(S) := \{g \in G \mid sg = gs\ \forall s \in S\} = \{g \in G \mid s^g = s\ \forall s \in S\}$),
centrum ($Z(G) := C_G(G) = \{g \in G \mid gx = xg\ \forall x \in G\}$)

Állítás: *Konjugáltak száma = normalizátor indexe. Speciálisan, elemre:* $h \in G$ *konjugáltosztályának elemszáma* $|G : C_G(h)|$.

****

Véges p-csoportok, Sylow-tételek

Definíció: p-csoport; p-Sylow-részcsoport.

Állítás: *Ha P véges p-csoport, akkor $Z(P) \neq 1$, sőt, minden $N \triangleleft P$-re $N \cap Z(P) \neq 1$.*

Következmény: $|G| = p^n \;\Rightarrow \forall k \leq n$ *van* $H \leq G$*, hogy* $|H| = p^k$.

Állítás: $G/Z(G)$ *ciklikus* $\Rightarrow G = Z(G)$*, azaz G kommutatív.*

Állítás: *Prímnégyzetrendű csoport kommutatív.*

Tétel: (Cauchy-tétel) *Ha $p \mid |G|$ és p prím, akkor G-ben van p rendű elem.*

Tétel: (1. Sylow-tétel) $p^n \mid |G| \;\Rightarrow G$*-ben van p^n rendű részcsoport.*

Tétel: (2. és 3. Sylow-tétel) *Ha G véges, akkor a p-Sylow-részcsoportjainak a száma kongruens 1-gyel, és a p-Sylow-részcsoportok konjugáltak egymással (tehát izomorfak is).*

Következmény: *G véges, $H \leq G$ p-csop.-ra: H p-Sylow* $\Leftrightarrow p \nmid |G : H|$.

Következmény: *Egy p-Sylow-részcsoport pontosan akkor normálosztó, ha a p-Sylowok száma 1.*

****

Direkt szorzat; Abel-csoportok

Definíciók: Direkt szorzat: külső és belső jellemzés, automorfizmuscsoport.

Tétel: (Véges Abel-csoportok alaptétele) *Minden véges Abel-csoport fölírható prímhatványrendű ciklikus csoportok direkt szorzataként, és ez a fölírás a tényezők sorrendjétől és izomorfiájától eltekintve egyértelmű.*

Tétel: $|\mathrm{Aut}(C_n)| = \varphi(n)$*, ahol φ a számelméleti φ függvény.* $\mathrm{Aut}(C_{p^n})$ *ciklikus, ha p páratlan prím, és izomorf $C_2 \times C_{2^{n-2}}$-vel, ha $p = 2$ és $n \geq 3$.*

****

A szimmetrikus csoport. Permutációcsoportok

Definíciók: Transzpozíció, ciklus, paritás

Állítás: *S_n minden eleme lényegében egyértelműen írható föl diszjunkt ciklusok szorzataként.*

Állítás: *S_n-t generálják a transzpozíciók.*

Állítás: *Paritás különböző ekvivalens megfogalmazásai. Az alternáló csoport 2 indexű normálosztó.*

Állítás: $\sigma, \tau \in S_n$ *konjugáltak* $\Leftrightarrow \sigma$ *és* τ *ciklusszerkezete megegyezik* $\big($*ui.* $(a_1 \ldots a_k)^g = (a_1 g \ldots a_k g)\big)$.

Tétel:

(1) *$n \geq 5$ esetén A_n egyszerű. Ilyenkor S_n normálosztói: $1, A_n, S_n$. (S_3-ra szintén.)*

(2) *S_4 normálosztói: S_4, A_4, A_4 2-Sylowja, 1.*